Traitement Numérique du Signal

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG deuxieme semestre 2008/2009

Séance 1 : 6 février 2009

Signaux physiques et modèles théoriques

Références Bibliographique :

M. KUNT, Traitement Numérique des Signaux,
Presse Polytechniques Romandes, 1984.
A. Oppenheim and R. Shafer, Digital Signal Processing, Prentice Hall, 1975

Notes des Cours sur Web :
http://www-prima.inrialpes.fr/Prima/Homepages/jlc/Courses/Courses.html

Signal et Information

Définitions :

Signal : Une représentation physique de l'information.

Bruit : Tout phénomène perturbateur gênant l'interprétation d'un signal.

Sur le plan analytique :

Un signal sera une fonction d'une variable réelle, en général le TEMPS.

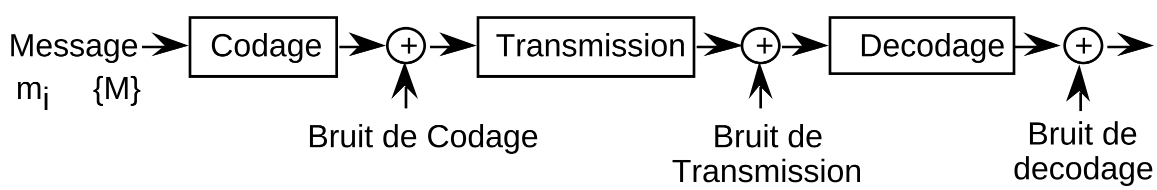
Exemples :

- signal audio x(t)
- signal vidéo noir et blanc p(x,y,t) (mono-dimensionnelle et multi-variable)
- signal vidéo couleur p(c,x,y,t) = [r(x,y,t) , v(x,y,t), b(x,y,t)]
  (multi-dimensionnelle et multi-variable)

Traitement du Signal : Théorie permettant d'effectuer une description (une modélisation) et une analyse des signaux et des systèmes.

Le traitement du signal a pour objectif la réalisation et l'interprétation des signaux porteurs d'information.

Exemple : La Communication

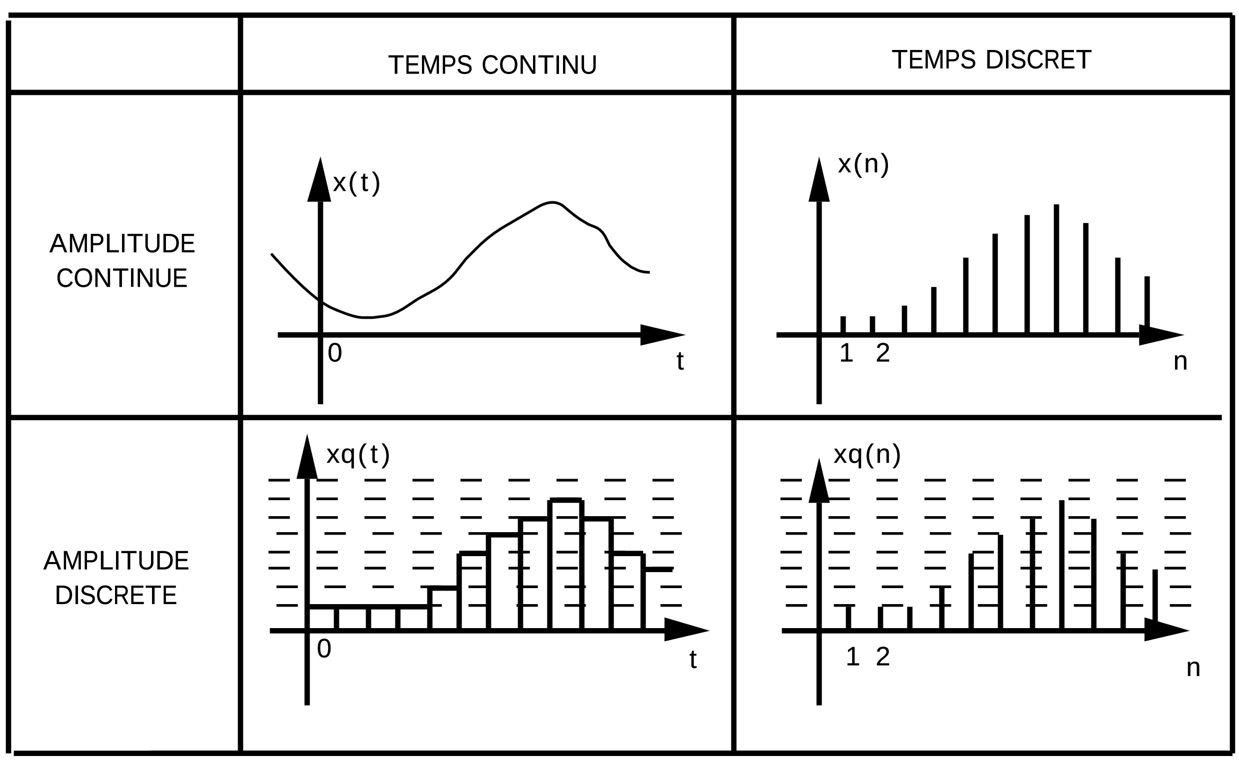


une chaîne de transmission dans laquelle le bruit s'ajoute au signal au niveau du codage (émetteur) puis dans le canal de transmission (rayonnement, couplage) et au niveau du récepteur dans lequel on va faire du traitement du signal pour extraire notre signal du bruit (information sans intérêt)

Représentation analogique et numérique

Les signaux peut avoir une manifestation physique comme une force electro-magnétique (onde hertzienne), une voltage our current (dans une circuit), une champ magnétique (une disquette) ou même par les formes physique (disque phonographique).

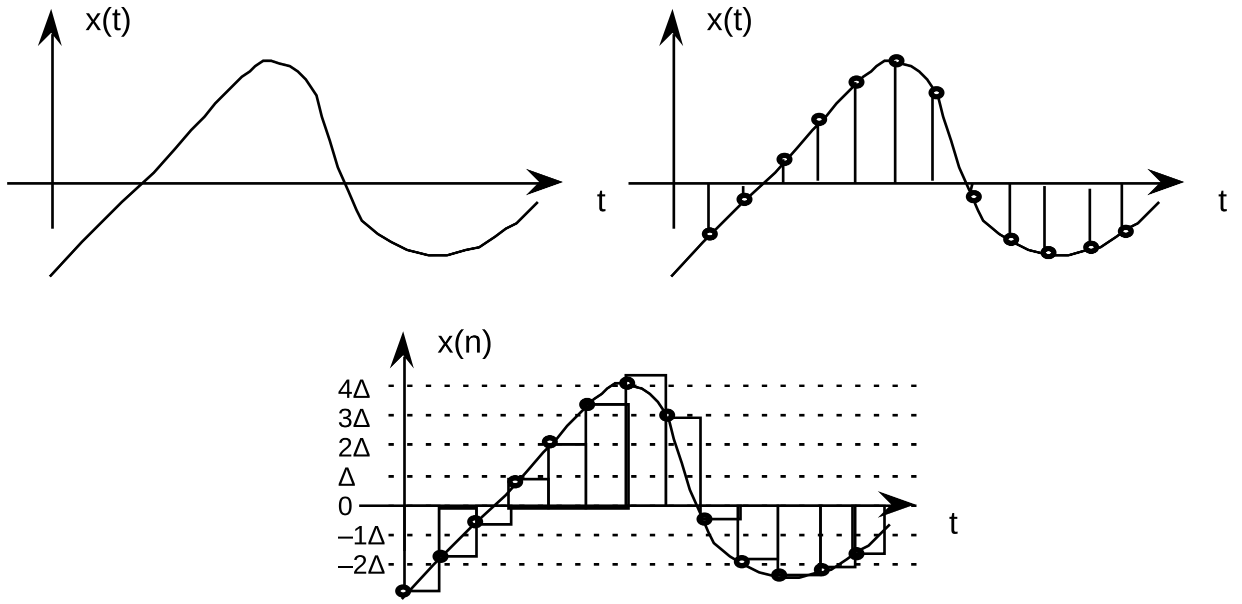
Les avances en moyen informatique (puissance de calcul) ont rendu possible l'expression et traitement de signaux en forme numérique. Mais pour numériser, il faut d'abord échantillonner. Nous allons voir que le passage analogique - numérique implique nécessairement une perte d'information. Cette perte peut être minimisé par l'application des outils adaptés.



CLASSIFICATION MORPHOLOGIQUE DES SIGNAUX

Tout système de traitement de signaux faisant appel à un ordinateur ou à un processeur numérique spécialisé implique nécessairement une opération préliminaire de conversion analogique-numérique (A/N).

L'Information traitée est restituée sour forme analogique par une conversion Numérique-analogique (N/A) (dit digital to analog ou A/D en Anglais).



La conversion analogique numérique implique une échantillonnage suivie d'une opération qui consiste à remplacer la valeur exacte analogique de l'échantillon par la plus proche valeur approximative extraite dun ensemble fini de valeurs discrètes.
Cette opération s'appelle la quantification. ("digitizing" en anglais).

Chacune de ces valeurs discrètes est exprimée par un nombre sous forme binaire, par un codage approprié. Ce nombre est compris entre deux valeurs limites qui fixent la plage de conversion.

Chaque nombre x_k, représente un ensemble de valeurs analogiques contenues dans un intervalle de largeur Δ_k appelé pas de quantification. Lorsque la plage de conversion est subdivisée en pas de quantifications égal, on parle de quantification uniforme.

Un signal analogique est une fonction x(t) d'amplitude continue, définit sur t continu. Un signal numérique est un tableau x(n) d'amplitude discret définit pour t discrete. Le passage x(t) -> x(n) ajout un bruit.

Le bruit d'un signal est mesuré par son énergie.

L'Énergie d'un Signal

L'énergie d'un signal, x(t), sur l'intervalle $[t_1, t_2]$:

$$W_s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)\, dt$$

ou pour un signal discret, x(n) sur l'intervalle $[N_1, N_2]$:

$$W_s(N_1, N_2) = \sum_{n=N_1}^{N_2} s^2(n)$$

l'énergie d'un signal est une caractéristique liée à la quantité de l'information représentée.

La qualité d'un signal est souvent représentée par le rapport de l'énergie du signal divisé par l'énergie du bruit, appelée "Rapport signal/bruit" (SNR en anglais).

pour $x(t) = s(t) + n(t)$.

Le rapport signal sur bruit est défini par

$\xi = \frac{W_s}{W_n}$ où W_s est l'énergie (2^{ieme} Moment) du signal x(t) et
W_n est l'énergie (2^{ieme} Moment) du bruit n(t)

Le SNR est souvent représenté avec une échelle logarithmique appelée décibels et noté dB.

$$\xi_{dB} = 10 \log_{10} \xi$$

Un facteur de 3 dB est équivalent à un facteur de 2

Puissance moyenne d'un signal: (dimension carrée de celle de x(t)).

$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt$$

L'énergie totale et la puissance moyenne totale sont calculées sur tout l'intervalle de temps soit :

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt$$

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\, dt$$

Si le signal est représenté par une fonction complexe de la variable t,
on remplace $x^2(t)$ par $|x(t)|^2$

Une distinction peut être fait entre :

- Les signaux à énergie finie,
- Les signaux à puissance moyenne finie non-nulle.

Classification des Signaux

Les signaux périodiques

$$x(t) = x(t+kT)$$

Le signal sinusoidal est le plus représentatif de ces signaux périodiques:

$$x(t) = A \sin(2\pi \frac{t}{T} + a) = A \,\mathrm{Sin}(\omega t+a) \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Les signaux à énergie finie

Les signaux à énergie finie sont ceux pour lesquels l'intégrale suivante est bornée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} | x(t) |^2 \, dt < \infty$$

Ces signaux sont dits de carré intégrable (sommable),
leur puissance moyenne est nulle.

Les signaux à puissance moyenne finie non-nulle

Les signaux périodiques, quasi périodiques, et signaux aléatoires permanents.
Ces signaux satisfont à la condition suivante

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} | x(t) |^2 \, dt < \infty$$

signaux de durée finie

Signaux de durée limitée ou "support borné" : $x(t) = 0 \quad t \quad T$

Signaux pairs et impairs

Un signal est pair si $x(t) = x(-t)$ exemple : $\cos(\omega t)$
Un signal est impair si $x(t) = -x(-t)$ exemple : $\sin(\omega t)$

remarque :

Tout signal réel peut être décomposé en une partie "paire" et une partie "impaire".

$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$

avec

$x_p(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$ et $x_i(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$

Signaux causals :

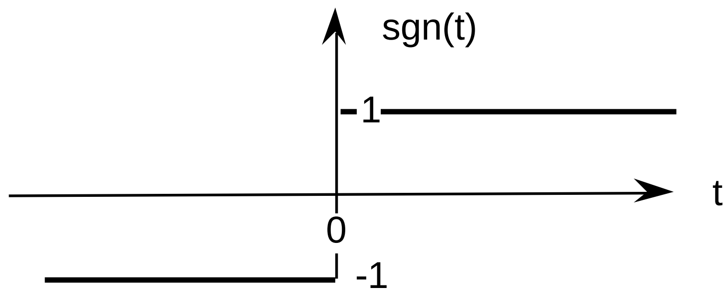
Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps

$x(t) = 0 \quad t < 0$

Quelques Signaux Théoriques

Les signaux théoriques sont les outils d'analyse.

1) La fonction signe

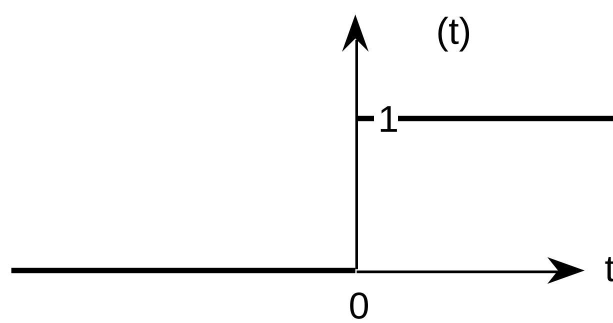


Cette fonction définit un signal selon la formulation suivante :

$$\mathrm{sgn}(t) \triangleq \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$\triangleq \frac{t}{|t|} \qquad t \neq 0$$

2) Le Saut unité ou échelon d'HEAVISIDE



Cette fonction peut se définir à partir de la fonction signe :

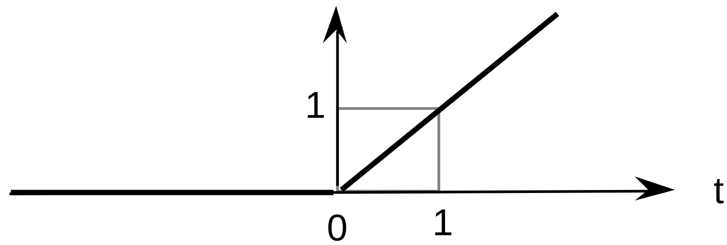
Discrèt :

$$(n) = u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

Continu :

$$(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

3) <u>Le Signal rampe</u>



Ce signal peut se définir à partir du signal (t) par

$$ra\,(t) \triangleq t\,u(t) \qquad ra(n) = n\,u(n)$$

4) <u>Signal rectangulaire</u>

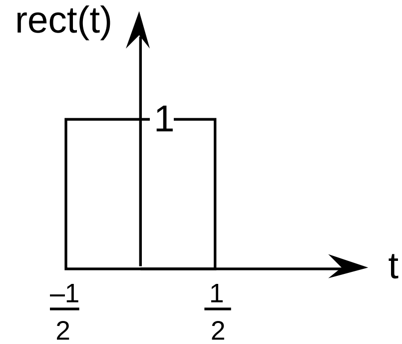
<u>Cas numérique</u> :

$$\text{Causal : } w_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n < N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$w_N(n)$ est aussi connu comme "Window Function" ou Fonction de porte

$$\text{non-causal : } rect_N(n) = \begin{cases} 1 & -\frac{N}{2} \le n \le \frac{N}{1} - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cas Continu : rect(t)



Ce signal est défini par la fonction rectangulaire normalisée (intégrale unité) ou fonction porte de la manière suivante :

$$\mathrm{rect}(t) \triangleq \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

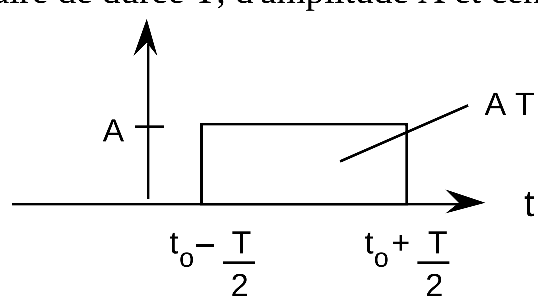
on note que :

$$\mathrm{rect}(t) = \quad (t + \frac{1}{2}) - \quad (t - \frac{1}{2})$$

On peut placer la rect au temps t_0 avec l'expression rect(t-t_0).

On peut rallonger une rect par le changement de variable $t_0 = \frac{t}{T}$.

la fonction rectangulaire généralisée : A rect((t - t_0) / T)
une impulsion rectangulaire de durée T, d'amplitude A et centrée sur $t = t_0$.



Cette fonction est souvent utilisée comme facteur multiplicatif d'une fonction quelconque pour représenter une portion limitée dans le temps (durée T) de cette fonction.

<u>5) Le signal Delta</u> :

<u>Delta numérique</u> :

$$\delta(n) \triangleq \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

<u>Delta Analogique</u> :

Le signal delta est formellement définie par le produit scalaire suivant :

$$\langle x(t),\delta(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0)$$

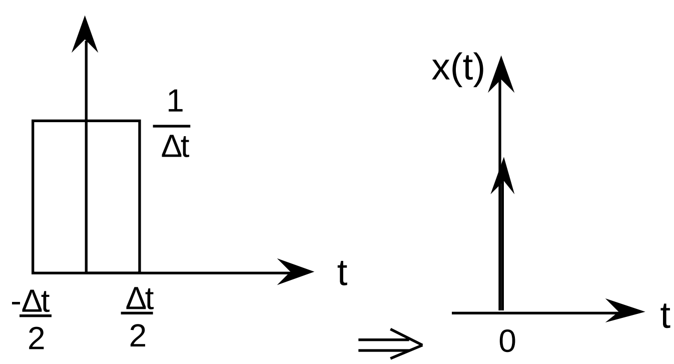
C'est un opérateur d'échantillonnage que restitue la valeur x(0) d'une fonction x(t). Sa dimension est l'inverse de celle de la variable d'intégration.

D'une manière plus générale, pour toute fonction x(t) continue on a:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt$$

La distribution delta peut être considéré comme la limite d'une impulsion de durée Δt et de hauteur $\frac{1}{\Delta t}$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{\frac{1}{\Delta t}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)\right\}$$



Intérêt du signal <u>delta</u> :

Le signal delta est utilisé pour localiser la valeur d'une fonction x(t) en t= t_0.

<u>Propriétés</u> du delta :

1) $\delta(t - t_0) = 0 \qquad t \neq t_0$

2) $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0)\, dt = 1 \qquad t_1 < t_0 < t_2$

Nota : que la valeur de $\delta(t - t_0)$ à t_0 est indéterminé.

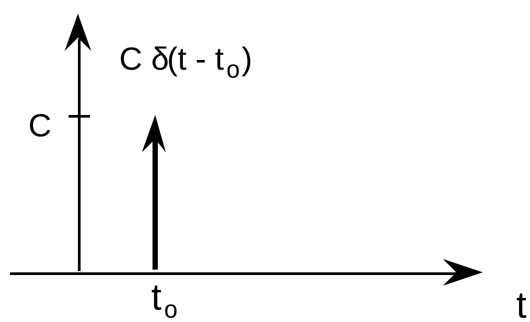
3) $x(t)\, \delta(t) = x(0)\, \delta(t)$

4) $x(t)\, \delta(t - t_0) = x(t_0)\, \delta(t - t_0)$

à condition que x(t) soit une fonction continue en t=0 et $t=t_0$.

Représentation graphique conventionnelle de $\delta(t - t_0)$:

une flèche verticale en $t=t_0$
de longueur proportionnelle au poids C

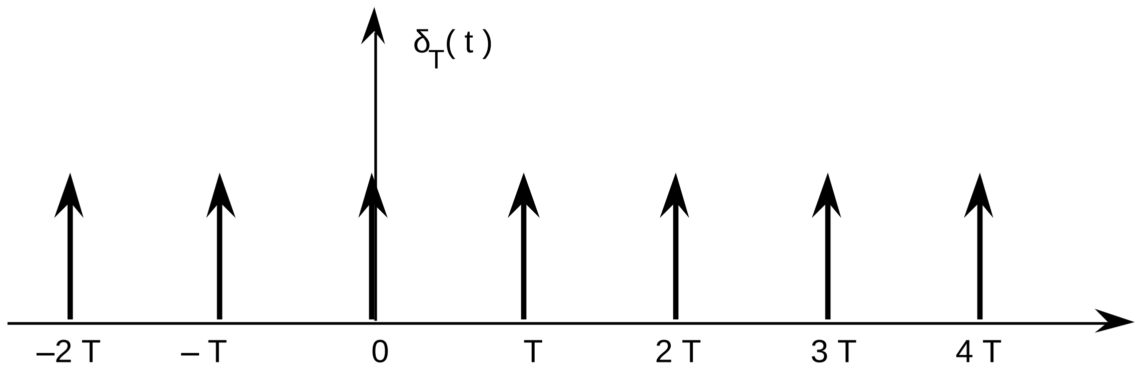


6) <u>Suite Périodique d'impulsions de delta</u>

Une suite d'impulsions de delta se répétant sur l'axe du temps avec une période T sera notée par concision $\delta_T(t)$

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Cette suite est parfois appelée “fonction d'échantillonnage” ou “peigne de Dirac”.


δT(t)
–2 T
– T
0
T
2 T
3 T
4 T