

# Formation et Analyse d'Images

James L. Crowley

ENSIMAG 3

Premier Sémestre 2006/2007

Séance 8

17 novembre 2006

## Détection et Suivi de Blobs de Pixels

### Plan de la Séance :

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| Classification des Pixels par Ratio d'Histogramme..... | 2  |
| Histogrammes .....                                     | 2  |
| Détection par ratio d'histogramme .....                | 3  |
| Histogrammes de Champs Réceptifs.....                  | 5  |
| Caractérisation d'un région par moments.....           | 6  |
| Composantes principales.....                           | 7  |
| Le Filtre de Kalman.....                               | 8  |
| Prédiction de l'évolution temporelle de l'état.....    | 10 |
| Modèle du capteur.....                                 | 12 |
| Aproximations des modèle non-linéaires.....            | 12 |
| Validation.....                                        | 13 |
| Mise à Jour.....                                       | 14 |
| L'Innovation.....                                      | 15 |

## Classification des Pixels par Ratio d'Histogramme

### Histogrammes

Un histogramme est une table de fréquence. Il peut fournir une estimation d'une densité de probabilités. Pour  $x$  entier, tel que  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ , on peut traiter chacun des valeurs possibles comme une classe d'événement.

Si les valeurs de  $x$  sont entières, tel que  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$  on peut estimer la probabilité à partir de  $M$  observations de la valeur,  $\{X_m\}$ .

Pour estimer la probabilité d'une valeur on peut compter le nombre d'observation de chaque valeur,  $x$ , dans une table,  $h(x)$ .

L'existence des ordinateurs avec des centaines de megabytes rendre des tables de fréquence très pratique pour la mise en œuvre en temps réel des algorithmes de reconnaissance. Dans certains domaines, comme l'analyse d'images, par abus de langage, un tel table s'appelle une histogramme. Proprement dit, l'histogramme est une représentation graphique de  $h(x)$

Ainsi la probabilité d'une valeur de  $X \in [X_{\min}, X_{\max}]$  est la fréquence d'occurrence de la valeur. Avec  $M$  observations de la valeur,  $X$ , on peut faire une table,  $h(x)$ , de fréquence pour chacun des valeurs possibles. On observe  $M$  exemples de  $X$ ,  $\{X_m\}$ .

Pour chaque observation on ajoute "1" à son entré dans la table.

$$m=1, M : h(X_m) := h(X_m) + 1; M := M+1;$$

$h(x)$  est une table de fréquence pour chaque  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ .  
Ainsi, on peut définir la probabilité d'une valeur  $x$  par sa fréquence :

$$p(X_m=x) \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{M} h(x) \right\}$$

Quand  $M$  est fini, on peut faire appel à l'approximation.

$$P(X=x) \approx \frac{1}{M} h(x)$$

La validité de l'approximation depend dunombre de valeurs possible et de  $M$ .

L'erreur moyenne entre  $\frac{1}{M} h(\vec{C})$  et  $P(\vec{C})$  est  $E_{ms} \sim O\left(\frac{Q}{M}\right)$

Pour que l'estimation soit "raisonnable", il faut assuré que  $M \gg Q = N^2$

En règle générale, on dit qu'il faut 10 exemples par cellule de l'histogramme.

## Détection par ratio d'histogramme

On peut utiliser les histogrammes avec la règle de Bayes pour détecter les objets.

Par exemple, construisons une histogramme pour le vecteur de chrominance (r,v).

La chrominance  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  est une signature pour l'objet.

La chrominance peut être définie par plusieurs codages. Par exemple, pour la détection du peau, il est fréquent de voir

$$c_1 = r = \frac{R}{R+V+B} \quad c_2 = v = \frac{V}{R+V+B}$$

Une autre codage fréquente est un codage en "couleur opposée", par exemple :

$$L = \frac{R+G+B}{3}, \quad c_1 = \frac{R-G}{2} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{R+G}{2} - B.$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.33 & 0.33 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

Chaque pixel est un vecteur (r, v) :  $\vec{C}(i, j) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}(i, j)$

Supposons qu'on code  $c_1$  et  $c_2$  avec les entiers entre 0 et  $N - 1$

$$c_1 = \text{Round} \left( (N-1) \cdot \frac{R}{R+G+B} \right) \quad c_2 = \text{Round} \left( (N-1) \cdot \frac{G}{R+G+B} \right)$$

On alloue un tableau 2D,  $h(c_1, c_2)$ , de taille  $N \times N$  cellules.  
(exemple  $Q = 32 \times 32 = 1024$  cellules)

Pour chaque pixel  $\vec{C} = C(i, j)$  dans l'image, on incrémente la cellule de l'histogramme qui correspond à  $\vec{C}$  :  $h(\vec{C}) := h(\vec{C}) + 1$

$$\text{c'a-dire} \quad h(c_1, c_2) := h(c_1, c_2) + 1$$

Soit  $M$  Pixels dans l'image. Un histogramme des chrominance,  $h(\vec{C})$ , des  $M$  pixels dans une l'image donne leurs fréquences d'occurrence.

$$p(\vec{C}) \approx \frac{1}{M} h(\vec{C})$$

Considère une région  $W$  de  $M_o$  pixels du même image correspondance à l'objet  $O$ .

$$(i,j) \in W : h_o(\vec{C}(i,j)) := h_o(\vec{C}(i,j)) + 1$$

Ensuite: pour tout pixel  $\vec{C}(i, j) = \vec{C}_o(i, j) : p(\vec{C} | \text{objet}) \approx \frac{1}{M_o} h_o(\vec{C})$

Parce que  $W$  est dans l'image, la probabilité de rencontrer un pixel de  $W$ ,

$$p(W) = \frac{M_o}{M}$$

L histogramme permet d'utiliser la règle de Bayes afin de calculer la probabilité qu'un pixel corresponde à un objet.

Pour chaque pixel  $\vec{C}(i, j)$   $p(\text{objet} | C) = p(C | \text{objet}) \frac{p(\text{objet})}{p(C)}$

Soit  $M$  images de  $I \times J$  pixels. Ceci fait  $N = I \times J \times M$  Pixels.

Soit  $h(r, v)$ , l'histogramme de tous les  $N$  pixels.

Soit  $h_o(r, v)$ , l'histogramme des  $N_o$  pixels de l'objet "o".

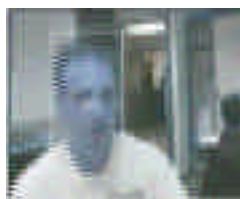
$$p(\text{objet}) = \frac{M_o}{M}$$

$$p(\vec{C}) = \frac{1}{M} h(\vec{C})$$

$$p(\vec{C} | \text{objet}) = \frac{1}{M_o} h_o(\vec{C})$$

$$p(\text{objet} | \vec{C}) = p(\vec{C} | \text{objet}) \frac{p(\text{objet})}{p(\vec{C})} = \frac{1}{M_o} h_o(\vec{C}) \frac{\frac{M_o}{M}}{\frac{1}{M} h(\vec{C})} = \frac{h_o(\vec{C})}{h(\vec{C})}$$

Par exemple, voici une image de la probabilité de peau fait par ratio d'histogramme de  $r, v$



**Histogrammes de Champs Réceptifs.**

Cette méthode peut être généralisée en remplaçant la chrominance par un vecteur de champs réceptifs. Mais il faut bien gérer la relation Q/M !

Soit une image  $p(i,j)$  et un vecteur de "d" champs réceptifs  $\vec{G}$

$\vec{V}(i,j) = \langle \vec{G}, p(i,j) \rangle$  est un vecteur de caractéristiques de d dimensions.

$h(\vec{V})$  aura  $Q = N^d$

| N= \ d= | 1     | 2                         | 3                        | 4                        | 5                         | 6                        |
|---------|-------|---------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 2       | $2^1$ | $2^2$                     | $2^3$                    | $2^4$                    | $2^5$                     | $2^6$                    |
| 4       | $2^2$ | $2^4$                     | $2^6$                    | $2^8$                    | $2^{10} = 1 \text{ Kilo}$ | $2^{12} = 2 \text{ Kil}$ |
| 8       | $2^3$ | $2^6$                     | $2^9$                    | $2^{12}$                 | $2^{15}$                  | $2^{18}$                 |
| 16      | $2^4$ | $2^8$                     | $2^{12}$                 | $2^{16}$                 | $2^{20} = 1 \text{ Meg}$  | $2^{24} = 4 \text{ M}$   |
| 32      | $2^5$ | $2^{10} = 1 \text{ Kilo}$ | $2^{15}$                 | $2^{20} = 1 \text{ Meg}$ | $2^{25}$                  | $2^{30} = 1 \text{ G}$   |
| 64      | $2^6$ | $2^{12}$                  | $2^{18}$                 | $2^{24}$                 | $2^{30} = 1 \text{ Gig}$  | $2^{36}$                 |
| 128     | $2^7$ | $2^{14}$                  | $2^{21} = 2 \text{ Meg}$ | $2^{28}$                 | $2^{35}$                  | $2^{42} = 2 \text{ Te}$  |
| 256     | $2^8$ | $2^{16}$                  | $2^{24}$                 | $2^{32} = 2 \text{ Gig}$ | $2^{40} = 1 \text{ Tera}$ | $2^{48}$                 |

Soit les champs réceptifs achromatique

$$\vec{G}_\sigma = (G_x, G_y, G_{xx}, G_{xy}, G_{yy})$$

$$d = 5$$

ou chromatique avec normalisation de l'orientation et échelle :

$$\vec{G}_{\sigma,\theta} = (G_x^L, G_{x1}^C, G_{x2}^C, G_{xx}^L, G_{xy}^L, G_{xx1}^C, G_{xx2}^C)$$

$$d = 7.$$

On peut faire

$$p(\text{objet}(i,j) \mid \vec{V}(i,j)) = \frac{p(\vec{V}(i,j) \mid \text{objet}(i,j)) p(\text{objet}(i,j))}{p(\vec{V}(i,j))} \approx \frac{h_o(\vec{V}(i,j))}{h_{\text{tot}}(\vec{V}(i,j))}$$

sur condition de gérer M et Q.

## Caractérisation d'un région par moments

Les ensemble connexes de pixels s'appelles les "blobs".

On peut décrire une blob par une vecteur de caractéristiques "invariantes" à l'orientation grâce aux "moments"

Les moments sont invariants aux transformations affines.

Pour une febre (imagette)  $w(i, j)$  de taille  $N \times M$

$$\text{Somme des Pixels :} \quad S = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w(i, j)$$

Premiers moments :

$$\mu_i = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w(i, j) \cdot i \quad \mu_j = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w(i, j) \cdot j$$

Le premier moment est le centre de gravité de la forme :

Deuxième moment :

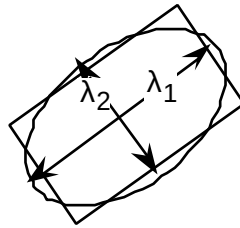
$$\sigma_i^2 = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (w(i, j)) \cdot (i - \mu_i)^2$$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w(i, j) \cdot (j - \mu_j)^2$$

$$\sigma_{ji}^2 = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w(i, j) \cdot (i - \mu_i)(j - \mu_j)$$

Ceci permet de définir les "axes", majeur,  $\lambda_1$  et mineur,  $\lambda_2$ , de la forme par analyse des composantes principales de la deuxième moment

$$C_o \cong \begin{pmatrix} \sigma_i^2 & \sigma_{ij}^2 \\ \sigma_{ij}^2 & \sigma_j^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u} \\ \hat{u} \end{matrix}$$

**Composantes principales**

Les deuxièmes moments sont "invariants" à l'orientation

Les axes sont calculés par une analyse en composantes principales de la matrice  $C$ . Il s'agit de trouver une rotation,  $\Phi$ , dans l'espace de caractéristiques  $\Phi^T C_P \Phi = \Lambda$  telles que  $\Lambda$  soit diagonale.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{tel que } \lambda_1 > \lambda_2 \quad \Phi = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Phi^T C_P \Phi = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \Phi^T \Phi = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^T C_P \Phi = \Phi^T C_P \Phi = \Lambda \quad \Phi = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Les lignes du  $\Phi$  sont des vecteurs propres du  $C$ .

La longueur des axes majeur et mineur est les valeurs propres de la matrice  $C$ .

$\theta$  est l'orientation de l'axe "majeur" et  $\lambda_1 / \lambda_2$  est le rapport entre la longueur et la largeur.

$\lambda_1 / \lambda_2$  est une caractéristique invariante de la taille et de l'orientation.

## Le Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un estimateur récursif optimal.

Son origine se trouve dans le problème de l'estimation de la trajectoire des satellites et des aéronefs. Dans un tel problème, on cherche à estimer la position (x, y, z) et la vitesse ( $v_x, v_y, v_z$ ) à partir de l'observation de deux angles : Site et azimuth. ( $\theta, \phi$ )

Dans la terminologie de Kalman : la position et vitesse est un vecteur d'état :  $\vec{X}$  et l'observation est  $\vec{Y}$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad \vec{Y} = \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}$$

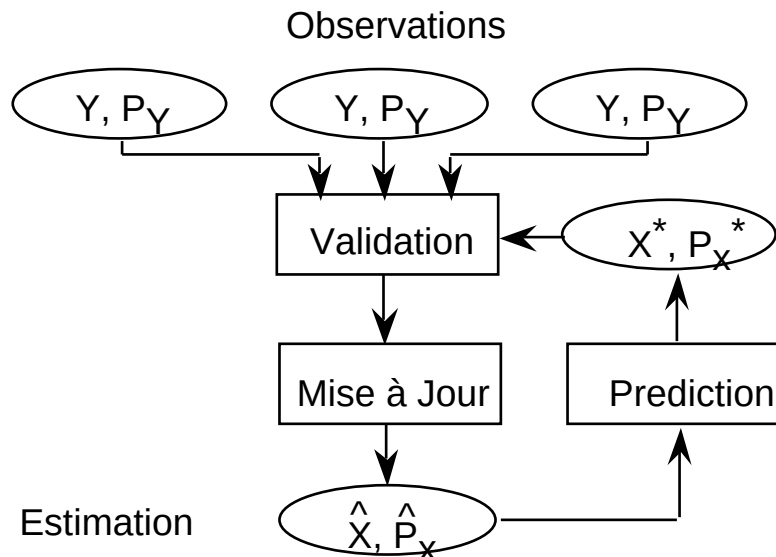
Pour chaque instant, t, le filtre donne une estimation  $\hat{X}_t$  ainsi que sa précision  $P_t$ , à partir de l'observation et l'estimation précédente,  $\hat{X}_{t-1}$ ,  $P_{t-1}$ , et l'observation  $\vec{Y}$ , et sa précision,  $P_y$ . Les précisions sont des covariances.

$$\hat{X}_t, P_t := F \{ \hat{X}_{t-1}, P_{t-1}, \vec{Y}, P_y \}$$

Ce permet d'estimer un vecteur de N variable aléatoire à partir de  $M < N$  observations. Les précisions sont des 2ieme moments de l'erreur.

Le filtre récursif est un processus cyclique avec 5 phases :

- 1) Prédiction de l'évolution temporelle de l'état.
- 2) Observation
- 3) Prédiction de l'observation
- 4) Validation de l'observation.
- 5) Mise à jour de l'estimation.



Techniques :

|              |                                                                 |
|--------------|-----------------------------------------------------------------|
| Prédictions: | Modèle Linéaire                                                 |
| validation : | Distance de Mahalanobis<br>(Distance normalisée par Covariance) |
| Mise à Jour  | Estimation linéaire                                             |

Notation:

|                                |                                                |
|--------------------------------|------------------------------------------------|
| Vecteur d'état a temp t :      | $\vec{X}_t$                                    |
| Estimation du vecteur d'état : | $\hat{\vec{X}}_t, \hat{\mathbf{P}}_t$          |
| Observation :                  | $\vec{Y}_t, \mathbf{P}_y$                      |
| Prédiction :                   | $\mathbf{X}_t^*, \mathbf{P}_t^*$               |
| Modèle du capteur :            | $\mathbf{H}_X^Y$ avec précision $\mathbf{P}_y$ |
| Modèle du processus :          | $\phi(\Delta t)$ avec précision $\mathbf{Q}_t$ |
| Affectation :                  | $:=$                                           |
| Définition :                   | $\equiv$                                       |

Le modèle de Kalman suppose que les estimations sont corrompues par un bruit  $\vec{B}$ .

$$\hat{\vec{X}} = \vec{X} + \vec{B}$$

Le bruit est une variable aléatoire de moyenne nul.  
La précision est le deuxième moment de ce bruit.

$$\mathbf{P} \equiv E\{\vec{B} \vec{B}^T\} = E\{(\vec{X} - \hat{\vec{X}})(\vec{X} - \hat{\vec{X}})^T\}$$

On ne peut connaître ni  $\vec{X}$  ni  $\vec{B}$ . Kalman nous fourni les estimations  $\hat{\mathbf{P}}_t$

**Prédiction de l'évolution temporelle de l'état**

La phase de prédiction projette  $\hat{X}_{t-1}$  et  $\hat{P}_{t-1}$  à temps  $t$  afin de produire  $X_t^*$  et  $P_t^*$

On utilise les dérivées temporelles de  $X$ .

Ces dérivées peuvent être incluses dans le vecteur  $\hat{X}_{t-1}$

Soit une propriété,  $\hat{x}$ , du vecteur  $\hat{X}$ , avec variance  $\sigma_x^2$ .

La prédiction de premier ordre  $x^*(t)$  exige la dérivée temporelle  $\hat{x}'(t-\Delta t)$ .

$$\hat{x}'_t \equiv \frac{\partial \hat{x}_t}{\partial t}$$

Par série de Taylor, on peut écrire :

$$x_t^* := \hat{x}_{t-\Delta t} + \hat{x}'_{t-\Delta t} \Delta t + r$$

avec l'hypothèse que  $E\{r\} = 0$ .

Soit un vecteur de deux propriétés  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$  avec une prédiction de premier ordre.

$$\hat{X}_t \equiv \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_1' \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2' \end{bmatrix}$$

La prédiction est :  $X_t^* := \phi(\Delta t)X_{t-\Delta t} + R$

avec la matrice de transition,  $\phi(\Delta t) \equiv \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La précision de  $X_t^*$  est la covariance des propriétés  $\hat{x}$

$$P_t^* \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1'x_1} & \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2'x_1} \\ \sigma_{x_1x_1'} & \sigma_{x_1'}^2 & \sigma_{x_2x_1'} & \sigma_{x_2'x_1'} \\ \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_1'x_2} & \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2'x_2} \\ \sigma_{x_1x_2'} & \sigma_{x_1'x_2'} & \sigma_{x_2x_2'} & \sigma_{x_2'}^2 \end{bmatrix}$$

où

$$\sigma_{xx'} \equiv E\{(x - \hat{x})(x' - \hat{x}')\}$$

et

$$\sigma_x^2 \equiv E\{(x' - \hat{x}')^2\}$$

La covariance  $P_t^*$  est prédite par  $P_t^* := \phi(\Delta t)P_{t-\Delta t}\phi(\Delta t)^T + E\{R_t R_t^T\}$

Le processus peut avoir les dérivés d'ordre supérieur à le modèle.

Ces dérivés donnent lieu au "résidu"  $R$ .

$R$  est supposée d'être moyenne nul.

Son deuxième moment indique la perte de précision dû au modèle linéaire.

$$X_t := X_{t-\Delta t} + \frac{\partial X_{t-\Delta t}}{\partial t} \Delta T + R_t.$$

avec

$$\mathbf{Q} \equiv E\{R_t R_t^T\}$$

Prédiction :

$$\text{I : } X_t^* := \boldsymbol{\phi}(\Delta t) \hat{X}_{t-\Delta t} + R_t.$$

$$\text{II : } \mathbf{P}_t^* := \boldsymbol{\phi}(\Delta t) \hat{\mathbf{P}}_{t-\Delta t} \boldsymbol{\phi}(\Delta t)^T + \mathbf{Q}_x$$

**Modèle du capteur**

Un capteur projette l'état du monde vers un vecteur d'observation :

$$\text{III : } \vec{Y}_t := \mathbf{H}_X^Y \vec{X}_t$$

$$\text{IV : } \mathbf{P}_Y \equiv E\{\mathbf{W}_t \mathbf{W}_t^T\}$$

La matrice de  $\mathbf{H}_X^Y$  est un modèle linéaire du capteur.  
 Les observations sont corrompues par les bruits aléatoires ainsi que une erreur d'approximation.  
 Ceci est représenté par l'erreur du capteur :  $\mathbf{W}_t$ .

On suppose que  $E\{\mathbf{W}_t\} = 0$   
 tandis que  $\mathbf{P}_Y \equiv E\{\mathbf{W}_t \mathbf{W}_t^T\}$

Par exemple, considère l'observation  $Y$  d'un état  $X_t$

$$Y = \mathbf{H}_X^Y X \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{x_1} \\ w_{x_2} \end{pmatrix}$$

deuxième exemple, la matrice de projection d'une caméra :

$$w X^i = \mathbf{M}_s^i X^s$$

**Aproximations des modèle non-linéaires**

Souvent le vrai capteur n'est pas linéaire.

$$\vec{Y} = F(\vec{X})$$

Dans ce cas, on peut faire une approximation linéaire avec la dérivée première, (la Jacobienne), calculé au tour de l'estimation actuelle.

$$\mathbf{H}_X^Y \approx \mathbf{J}_X^Y = \frac{\partial F(\hat{X}_t)}{\partial \hat{X}_t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_4} \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{x_1} \\ w_{x_2} \end{pmatrix}$$

**Validation**

Validation repose sur une mesure de similarité. Une telle mesure est la "Distance de Mahalanobis" ou "Différence normalisée par covariance"

Soit la prédiction  $X_t^*$  avec sa précision  $P_t^*$   
et l'observation  $\vec{Y}_t$  avec sa précision  $P_y$

Le distance de Mahalanobis est

$$V: d^2 = \frac{1}{2} \{ (\mathbf{H}_X^Y X_t^* - \vec{Y}_t)^T (\mathbf{P}_t^* + \mathbf{P}_y)^{-1} (\mathbf{H}_X^Y X_t^* - \vec{Y}_t) \}$$

Pour une scalaire :

$$d^2 = \frac{(x^* - y)^2}{2 (\sigma_x^{*2} + \sigma_y^2)}$$

On considère que  $X_t^*$ ,  $P_t^*$  définie une probabilité d'une observation Y.

Si il y a K prédictions :  $X_{kt}^*$ ,  $P_{kt}^*$ , l'observation est associée a :

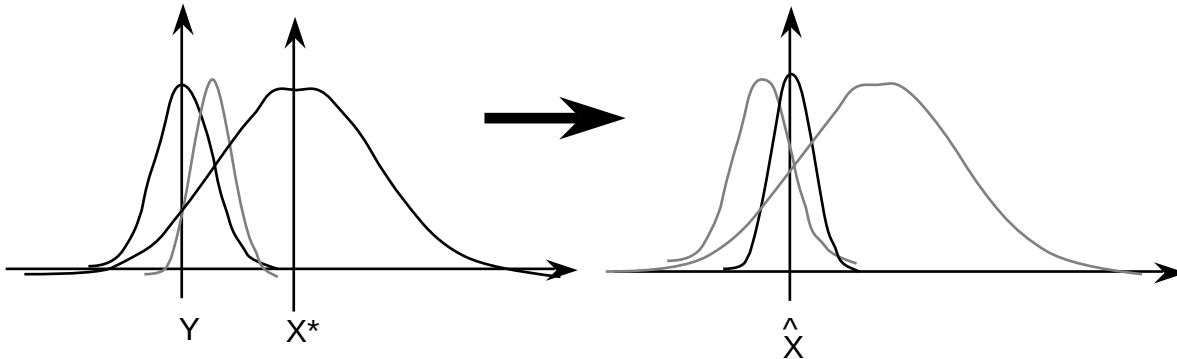
$$\text{ArgMin} \{d_k^2\} \text{ tel que } d_k \leq \text{seuil.}$$

Le seuil est un multiple de l'écart type.  
Son choix dépend du problème

**Mise à Jour**

Contraint d'un modèle par une Observation

Soit un modèle  $X_t^*, P_t^*$  et une observation  $\vec{Y}_t, P_Y$



$Y$  fournit une contrainte sur  $X^*$ .

La nouvelle valeur est donnée par un moyen, pondérée par la variance:

Les variances combinées comme les résistances parallèles :

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}$$

et

$$\hat{x}_{nt} = \sigma_{\hat{x}}^2 \left( \frac{X^*}{\sigma_x^{*2}} + \frac{Y}{\sigma_y^2} \right)$$

Formulation Kalman (estimation récursif): Le Gain de Kalman

$$K = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}$$

Puis :

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \sigma_x^{*2} - K \sigma_x^{*2}$$

et

$$\hat{x} = X^* + K (Y - X^*)$$

En plusieurs dimensions, le gain de Kalman est une matrice.

Supposons que  $Y$  et  $X$  sont dans le même espace. (Même nombre de variables.

$$K := P_t^* (P_t^* + P_Y)^{-1}$$

puis :

$$\hat{X}_t = X_t^* + K [Y - X_t^*].$$

et

$$\hat{P}_t = P_t^* - K P_t^*.$$

Et si  $X$  et  $Y$  ne sont pas du même repère,

il faut la transformation  $H_X^Y$  et son inverse  $H_Y^X = H_X^Y{}^T$

Équations VI, VII et VIII du Filtre de Kalman :

$$\text{VI :} \quad \mathbf{K} := \mathbf{P}_t^* \mathbf{H}_X^Y \mathbf{T} [\mathbf{H}_X^Y \mathbf{P}_t^* \mathbf{H}_X^Y \mathbf{T} + \mathbf{P}_y]^{-1}$$

$$\text{VII :} \quad \hat{\mathbf{X}}_t := \mathbf{X}_t^* + \mathbf{K} [\vec{\mathbf{Y}}_t - \mathbf{H}_X^Y \mathbf{X}_t^*]$$

$$\text{VIII :} \quad \hat{\mathbf{P}}_t := \mathbf{P}_t^* - \mathbf{K} \mathbf{H}_X^Y \mathbf{P}_t^*$$

## L'Innovation

Le différence  $(\vec{\mathbf{Y}}_t - \mathbf{H}_X^Y \mathbf{X}_t^*)$  est l'innovation de l'observation.

Le gain  $\mathbf{K}$  est une matrice qui donne le poids pour une mise à jour de  $x_i$  à partir de chaque composant de l'innovation.

$$\hat{\mathbf{X}}_t := \mathbf{P}_t^* - \mathbf{K} \mathbf{H}_X^Y \mathbf{P}_t^*$$

$$\begin{pmatrix} k_{x1y1} & k_{x1y2} \\ k_{x2y1} & k_{x2y2} \\ k_{x3y1} & k_{x3y2} \\ k_{x4y1} & k_{x4y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_4}{\partial y_1} & \frac{\partial x_4}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - H_X^1 X_t^* \\ y_2 - H_X^2 X_t^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} := \mathbf{P}_t^* \mathbf{H}_X^Y \mathbf{T} [\mathbf{H}_X^Y \mathbf{P}_t^* \mathbf{H}_X^Y \mathbf{T} + \mathbf{P}_y]^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} k_{x1y1} & k_{x1y2} \\ k_{x2y1} & k_{x2y2} \\ k_{x3y1} & k_{x3y2} \\ k_{x4y1} & k_{x4y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 & \sigma_{14}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{24}^2 \\ \sigma_{31}^2 & \sigma_{32}^2 & \sigma_{33}^2 & \sigma_{34}^2 \\ \sigma_{41}^2 & \sigma_{42}^2 & \sigma_{43}^2 & \sigma_{44}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}^{-1}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 & \sigma_{14}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{24}^2 \\ \sigma_{31}^2 & \sigma_{32}^2 & \sigma_{33}^2 & \sigma_{34}^2 \\ \sigma_{41}^2 & \sigma_{42}^2 & \sigma_{43}^2 & \sigma_{44}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \\ h_{13} & h_{23} \\ h_{14} & h_{24} \end{pmatrix}$$