

# Formation et Analyse d'Images

James L. Crowley

ENSIMAG 3 - Option IRV

Premier Bimestre 2006/2007

Séance 3

6 octobre 2006

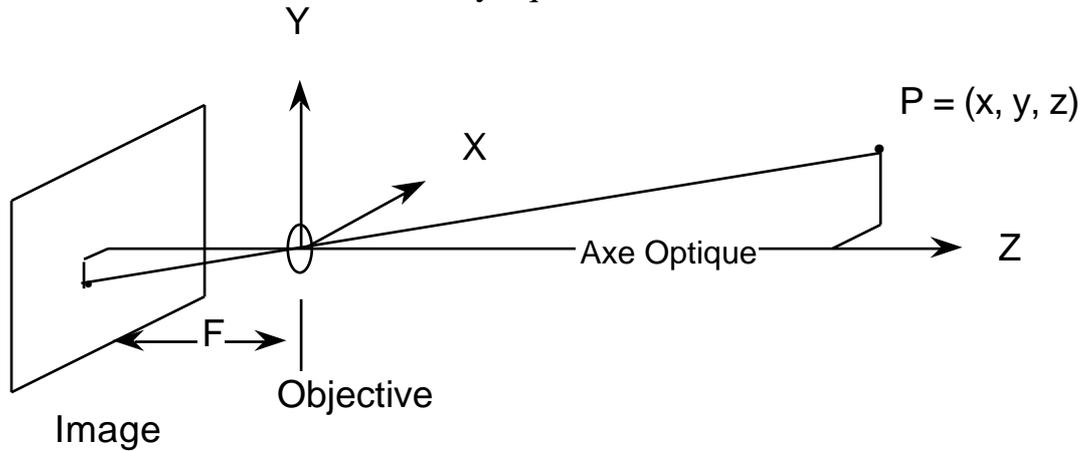
## Plan de la Séance :

### Calibrage du Modèle de la Caméra

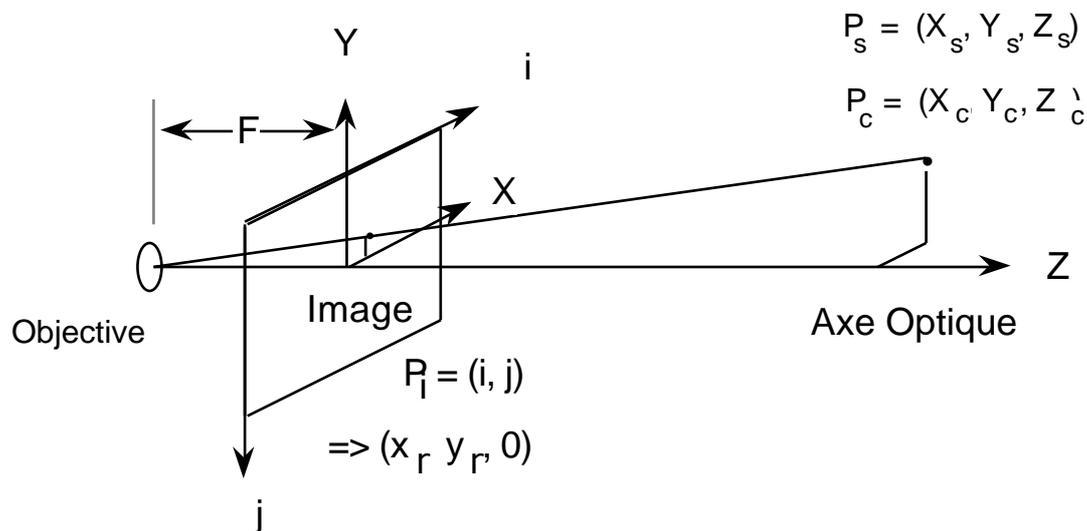
Modèle de la Caméra .....	2
Les Repères .....	2
La Composition de la Projection Scène - Image .....	3
Calibrage de la Projection Scène - Image.....	4
Dérivation alternative : Le produit croisé.....	7
Homographie entre deux plans .....	8
Rectification de l'Image d'un plan. ....	9
Estimation et Rectification par Homographie.....	10

## Modèle de la Caméra

Modèle de la Caméra Géométrie Physique



Modèle Mathématique: Projection Centrale



## Les Repères

Coordonnées de la Scène :

$$\text{Point Scène : } P^s = (x_s, y_s, z_s, 1)^T$$

Coordonnées de la Caméra :

$$\text{Point Caméra : } P^c = (x_c, y_c, z_c, 1)^T$$

$$\text{Point Image : } P^r = (x_r, y_r, 1)^T$$

Coordonnées de l'Image :

$$\text{Point Image : } P^i = (i, j, 1)^T$$

## La Composition de la Projection Scène - Image

$$\mathbf{P}^i = \mathbf{C}_r^i \mathbf{P}_c^r \mathbf{T}_s^c \mathbf{P}^s = \mathbf{M}_s^i \mathbf{P}^s$$

$$\begin{pmatrix} w \cdot i \\ w \cdot j \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{M}_s^i \begin{pmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$i = \frac{w \cdot i}{w} = \frac{M_s^1 \cdot P^s}{M_s^3 \cdot P^s} \qquad j = \frac{w \cdot j}{w} = \frac{M_s^2 \cdot P^s}{M_s^3 \cdot P^s}$$

ou bien

$$i = \frac{w \cdot i}{w} = \frac{M_{11} X_s + M_{12} Y_s + M_{13} Z_s + M_{14}}{M_{31} X_s + M_{32} Y_s + M_{33} Z_s + M_{34}}$$

$$j = \frac{w \cdot j}{w} = \frac{M_{21} X_s + M_{22} Y_s + M_{23} Z_s + M_{24}}{M_{31} X_s + M_{32} Y_s + M_{33} Z_s + M_{34}}$$

Projection inverse, du repère image vers le repère scène :

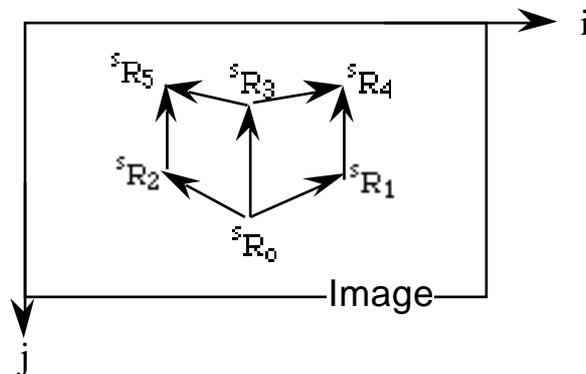
$$\mathbf{P}^s = \mathbf{T}_c^s \mathbf{P}_r^c \mathbf{C}_i^r \mathbf{P}^i$$

Cependant, l'inversion de la transformation perspective  $\mathbf{P}_r^c$  implique la connaissance de la profondeur,  $z_c$ , pour chaque pixel.

## Calibrage de la Projection Scène - Image

Comment obtenir  $\mathbf{M}_s^i$ ? Par calibrage.

On définit un mire composé de points pour lesquels les positions sont connues  $\mathbf{R}_k^s$ .



La matrice  $\mathbf{M}_s^i$  est composée de  $3 \times 4 = 12$  coefficients. Cependant,  $\mathbf{M}_s^i$  est homogène, avec rang  $12 - 1 = 11$ .

On détermine une correspondance entre les points dans le scènes ( $\mathbf{R}_k^s$ ) et leurs images ( $\mathbf{P}_k^i$ ). Chaque point donne deux équations pour les 11 inconnus.

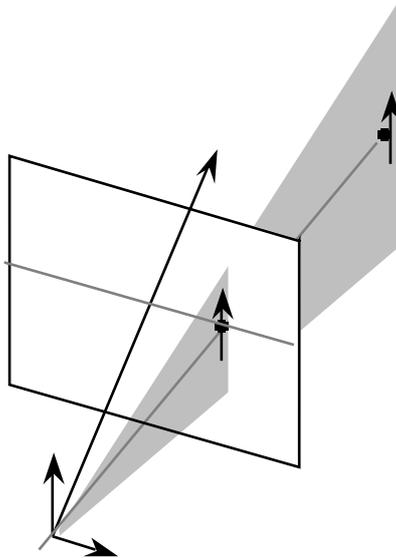
Il faut au moins  $5 \frac{1}{2}$  correspondances pour les 11 inconnus.

Pour chaque point de calibrage  $\mathbf{R}_k^s$  et sa projection  $\mathbf{P}_k^s$ , on peut écrire :

$$i_k = \frac{w_k i_k}{w_k} = \frac{\mathbf{M}_s^1 \cdot \mathbf{R}_k^s}{\mathbf{M}_s^3 \cdot \mathbf{R}_k^s} \quad j_k = \frac{w_k j_k}{w_k} = \frac{\mathbf{M}_s^2 \cdot \mathbf{R}_k^s}{\mathbf{M}_s^3 \cdot \mathbf{R}_k^s}$$

Avec lequel on peut déterminer 2 équations pour les 11 inconnus

$$(\mathbf{M}_s^1 \cdot \mathbf{R}_k^s) - i_k (\mathbf{M}_s^3 \cdot \mathbf{R}_k^s) = 0 \quad (\mathbf{M}_s^2 \cdot \mathbf{R}_k^s) - j_k (\mathbf{M}_s^3 \cdot \mathbf{R}_k^s) = 0$$



L'équation  $(M_s^1 \cdot R_k^s) - i_k (M_s^3 \cdot R_k^s) = 0$  est un plan passant par l'origine de la caméra est la colonne  $i=i_k$ .

L'équation  $(M_s^2 \cdot R_k^s) - j_k (M_s^3 \cdot R_k^s) = 0$  est un plan passant par l'origine de la caméra est la ligne  $j=j_k$ .

Avec notation tensorielle, les équations de la calibration sont explicites.

soit  $P^i = \begin{matrix} w_i \\ w_j \\ w \end{matrix}$  On écrit :  $P^i = M_s^i R^s$

Avec K points de la scène  $R_k^s$  et leur correspondance de l'image  $P_k^i$  on peut écrire

$$P_k^i = M_s^i R_k^s$$

On ne connaît pas  $P_k^i$  mais  $i w = P_k^1/P_k^3$  et  $j w = P_k^2/P_k^3$ . Donc Pour chaque point k, il y a deux équations indépendantes,  $i=1, 2$ .

$$\begin{matrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{matrix} = \begin{matrix} w_i \\ w_j \\ w \end{matrix} \quad \text{donc} \quad \begin{matrix} i \\ j \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} p^1/p^3 \\ p^2/p^3 \\ 1 \end{matrix}$$

et  $P_k^3 = M_s^3 R_k^3$

$$\begin{matrix} i = p^1/p^3 = M_s^1 R_k^s / M_s^3 R_k^s & i M_s^3 R_k^s - M_s^1 R_k^s = 0 \\ j = p^2/p^3 = M_s^2 R_k^s / M_s^3 R_k^s & j M_s^3 R_k^s - M_s^2 R_k^s = 0 \end{matrix}$$

Pour chaque k, ceci donne deux équations :

$$\begin{matrix}
 R^1 & R^2 & R^3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -iR^1 & -iR^2 & -iR^3 & -i \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R^1 & R^2 & R^3 & 1 & -jR^1 & -jR^2 & -jR^3 & -j
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \mathbf{M}_1^1 \\
 \mathbf{M}_2^1 \\
 \mathbf{M}_3^1 \\
 \mathbf{M}_4^1 \\
 \mathbf{M}_1^2 \\
 \mathbf{M}_2^2 \\
 \mathbf{M}_3^2 \\
 \mathbf{M}_4^2 \\
 \mathbf{M}_1^3 \\
 \mathbf{M}_2^3 \\
 \mathbf{M}_3^3 \\
 \mathbf{M}_4^3
 \end{matrix}
 = 0$$

Pour N points (non-coplanaires) on peut écrire un système de 2N équations :

$$\mathbf{A} \mathbf{M}_s^i = 0.$$

Le rank de A est 11. Le problème est de minimiser un critère :

$$\mathbf{C} = \| \mathbf{A} \mathbf{M}_s^i \|^2$$

On utilise les multiplieurs de Lagrange afin d'obtenir le  $\mathbf{M}_s^i$  qui minimise C

Exemple : Soit un cube dont les coins sont détectés à :

$$\begin{matrix}
 P_o^L = (101, 221) & P_1^L = (144, 181) & P_2^L = (22, 196) \\
 P_3^L = (105, 88) & P_4^L = (145, 59) & P_5^L = (23, 67)
 \end{matrix}$$

Par moindre de carré on obtient :

$$\mathbf{M}_s^i = \begin{matrix}
 55.886873 & -79.292084 & 1.276703 & 101.917630 \\
 -22.289319 & -17.878203 & -134.345576 & 221.300658 \\
 0.100734 & 0.038274 & -0.008458 & 1.000000
 \end{matrix}$$

## Dérivation alternative : Le produit croisé.

Dans une notation matricielle, on écrit :

$$P \times M_s^i R = 0$$

Le terme  $R$  est facturé pour obtenir  $P R \times M_s^i = 0$

Ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & -wR^s & jwR^s \\ -wR^s & 0 & -iwR^s \\ wR^s & -wR^s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_s^1 \\ M_s^2 \\ M_s^3 \end{pmatrix} = 0$$

Parse que  $R$  et  $M_s^i$ , sont les vecteurs, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & wX & wY & wZ & w1 & -jwX & -jwY & -jwZ & -jw1 \\ -wX & -wY & -wZ & -w & 0 & 0 & 0 & 0 & -iwX & -iwY & -iwZ & -iw1 \\ wX & wY & wZ & w & -wX & -wY & -wZ & -w & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^1 \\ M_2^1 \\ M_3^1 \\ M_4^1 \\ M_1^2 \\ M_2^2 \\ M_3^2 \\ M_4^2 \\ M_1^3 \\ M_2^3 \\ M_3^3 \\ M_4^3 \end{pmatrix} = 0$$

Dont deux equations sont indépendants.

## Homographie entre deux plans

La projection d'un plan vers un autre plan est une transformation projective entre deux plans. Cette transformation s'appelle une "homographie".  
L'homographie est bijective.

Elle est bijective est facile a estimate et de "recetifié.

$$Q^B = \mathbf{H}_A^B P^A$$

En notation "classique".

$$\begin{array}{ccc} w x_B & & x_A \\ w y_B & = \mathbf{H}_A^B & y_A \\ w & & 1 \end{array} = \begin{array}{ccc} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{array} \begin{array}{c} x_A \\ y_A \\ 1 \end{array}$$

$$x_B = \frac{w x_B}{w} = \frac{m_{11} x_A + m_{12} y_A + m_{13}}{m_{31} x_A + m_{32} y_A + m_{33}}$$

$$y_B = \frac{w y_B}{w} = \frac{m_{21} x_A + m_{22} y_A + m_{23}}{m_{31} x_A + m_{32} y_A + m_{33}}$$

En notation "tensorielle"

$$Q^B = \mathbf{H}_A^B P^A$$

$$\begin{array}{ccc} q^1 & & p^1 \\ q^2 & = \mathbf{H}_A^B & p^2 \\ q^3 & & p^3 \end{array} = \begin{array}{ccc} h_1^1 & h_2^1 & h_3^1 \\ h_1^2 & h_2^2 & h_3^2 \\ h_1^3 & h_2^3 & h_3^3 \end{array} \begin{array}{c} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{array}$$

$$x_B = \frac{q^1}{q^3} \quad y_B = \frac{q^2}{q^3}$$

## Rectification de l'Image d'un plan.

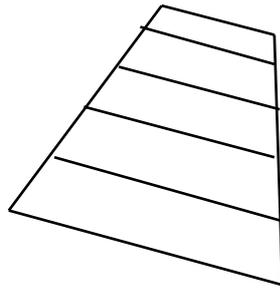
La projection d'un plan 2D dans un scène 3D vers le retine 2D d'un caméra est une homographie. Elle est bijective est facile a "corriger".

Ceci a des nombreuse applications. Par exemple, l'image d'un tableau blanc peut être "rectifié" par l'homographie inverse.

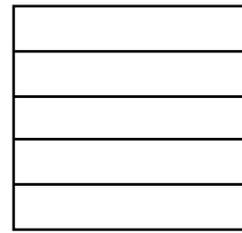
$$\mathbf{H}_D^S = (\mathbf{H}_S^D)^{-1}$$



Dans le scène



Dans l'image (source)



L'image Rectifié  
(destination)

Pour chaque pixel de l'image destination, on calcul son position dans l'image source.

$$Q^S = \mathbf{H}_D^S P^D \quad \text{pour } S, D = 1, 2, 3.$$

Ensuite Pour chaque pixel  $P^D$  on détermine la valeur de la pixel au position

$$\begin{array}{rcl} x_s & = & q^1/q^3 \\ y_s & = & q^2/q^3 \\ 1 & & 1 \end{array}$$

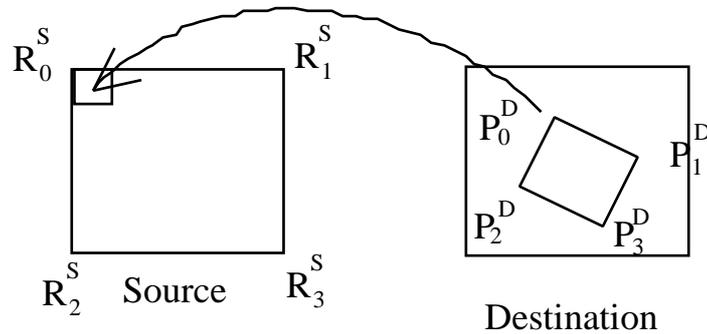
Ensuite

Pour chaque pixel,  $P^D$  :

$$\text{SetPixel}(\text{Destination}, P^D) = \text{BiLinear\_Interpolate}(\text{Source}, (\mathbf{H}_D^S P^D));$$

## Estimation et Rectification par Homographie

La Homographie peut être déterminée par observation des 4 coins d'un carré.



Soit les quatre coins,  $k=1, 2, 3, 4$  de l'image dans repère destination :

$$P_k^D = \begin{pmatrix} p_0^1 & p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 \\ p_0^2 & p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ p_0^3 & p_1^3 & p_2^3 & p_3^3 \end{pmatrix}$$

On dit qu'ils correspondent aux sommets de l'image source

$$R_k^S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note  $R_k^S = H_D^S P_k^D$

Le  $3 \times 3$  matrice inconnue,  $H_D^S$  a 9 coefficients.

Parce que  $H_D^S$  est en coordonnées homogènes, on peut fixer  $H_3^S = 1$ .

Il nous reste 8 coefficients à estimer.

Donc :

$$\begin{aligned} R_k^1 / R_k^3 &= H_D^1 P_k^D / H_D^3 P_k^D \\ \text{et } R_k^2 / R_k^3 &= H_D^2 P_k^D / H_D^3 P_k^D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k^1 H_D^3 P_k^D &= R_k^3 H_D^1 P_k^D \\ R_k^2 H_D^3 P_k^D &= R_k^3 H_D^2 P_k^D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k^1 H_D^3 P_k^D - R_k^3 H_D^1 P_k^D &= 0 \\ R_k^2 H_D^3 P_k^D - R_k^3 H_D^2 P_k^D &= 0 \end{aligned}$$

Ceci donne deux équations ( $S=1, 2$ ) pour chaque coin ( $k=1,2,3,4$ ), donc 8 équations pour les 8 inconnues du  $H_D^S$ . L'équation pour  $S=3$  n'est pas indépendante de  $S=1$  et  $S=2$ .

Ensuite Pour chaque pixel,  $P^D$  :

$$\text{SetPixel}(\text{Destination}, P^D) = \text{BiLinear\_Interpolate}(\text{Source}, (H_D^S P^D));$$

