

# Traitement du Signal

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG

première Bimestre 2006/2007

Séance 4 :

9 mars 2007

## Le Filtrage Numérique

Formule(s) du Jour : Le Convolution Numérique .....	2
Le Filtrage Numérique.....	3
Filtrage Non-Recursif .....	3
Filtrage Récurisif.....	4
Filtrage par Produit de Transformée de Fourier Discrète. ....	5
Convolution par TFD.....	6
Caractérisation de Filtrés:.....	7
Transformée de Fourier d'un signal numérique .....	8
La Fonction de Transfert.....	8
Quelques Exemples des Filtrés.....	10
Calcul de la dérivée d'un signal numérique.....	10
Intuition : Symétrie et Anti-symétrie.....	12
Une pense Bête pour les relations trigonométriques.....	13
Lissage d'un signal numérique : Les Filtrés Binomiaux.....	13
Méthode de synthèse de la série de Fourier .....	16
Effets de la limitation de la durée de $h_s(n)$ :.....	18
La Sinus Cardinale pour une fonction discrète.....	19
Utilité :.....	20
Filtre passe bas.....	21
filtre passe bande.....	22
Gabarit d'un Filtré.....	23

## Formule(s) du Jour : Le Convolution Numérique

1) Le Convolution Numérique.

Considère les deux séquences numériques aperiodiques potentiellement non-nul sur les intervalles de durée  $N_x$  et  $N_f$ .

Soit  $x(n)$  de non-nul pour  $n \in [0, N_x-1]$  et  $f(n)$  de non-nul pour  $n \in [0, N_f-1]$ .

$$\begin{aligned} x(n) &= 0 \quad n \notin [0, N_x-1], \\ f(n) &= 0 \quad n \notin [0, N_f-1] \end{aligned}$$

Les séquences aperiodiques sont supposées exister avec des valeurs nulles hors de leur intervalle de définition.

La convolution aperiodique de  $x(n)$  et  $f(n)$  est un produit scalaire pour chaque  $m$

$$y(m) = f * x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot f(m-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m-n) \cdot f(n)$$

Ce produit est potentiellement non-nul sur des  $N_x + N_f - 1$  échantillons, dans l'intervalle  $[0, N_x + N_f - 1]$

La **convolution** est l'opération de traitement de signal la plus fondamentale.

2) Conception d'un filtre numérique

$$h_s(n) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} H_s(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

méthode de synthèse de filtre :

On spécifie les caractéristiques souhaitées en fréquence  $H(\omega)$  pour l'intervalle

$$-\pi < \omega < \pi.$$

$H_s(\omega)$  est périodique avec une période  $2\pi$  pour  $h(n)$  échantillonné.

Les coefficients du filtre sont ensuite donnés par la transformée de Fourier inverse

## Le Filtrage Numérique

Un filtre numérique est une combinaison linéaire d'échantillons.

Il existe trois techniques de filtrage numérique

Filtrage non-récurif

Filtrage Récurif,

Filtrage par produit de TFD.

Quelques domaines d'application du filtrage (liste non-exhaustive):

- Communications : téléphone, radio, télévision, etc.
- Musique
- Radar
- Reconnaissance de Parole
- Traitement d'image (ex : satellite, médicale, inspection industrielle)
- Vision par ordinateur

### Filtrage Non-Récurif

Une opération de filtrage définie par une convolution avec une séquence de durée finie  $f(n)$ .

Les filtres non-récurif ont une réponse impulsionnelle finie.

Ils sont parfois connus sous le nom: FIR (Finite Impulse Response) ou Réponse Impulsionnelle Finie

Considère les deux séquences numériques apériodiques potentiellement non-nul sur les intervalles de durée  $N_x$  et  $N_h$ .

Soit  $x(n)$  de non-nul pour  $n \in [0, N_x-1]$  et  $f(n)$  de non-nul pour  $n \in [0, N_h-1]$ .

$$x(n) \neq 0 \quad n \in [0, N_x-1],$$

$$f(n) \neq 0 \quad n \in [0, N_h-1]$$

La convolution apériodique de  $x(n)$  et  $f(n)$  est un produit scalaire pour chaque  $m$

$$y(m) = f * x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot f(m-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m-n) \cdot f(n)$$

Ce produit est potentiellement non-nul sur un intervalle  $[0, N_x+N_h-2]$

La durée du résultat potentiellement non-nul est de  $N_x + N_h - 1$  échantillons.

Intérêts :

1) Le délai de réponse le même pour toute fréquence.  $(f) = k \cdot f =$   
(La phase d'un filtre non-récurrent est linéaire avec le fréquence).

Conséquence : Un signal n'est pas dispersé par le filtrage.

Ceci est important pour les images, mais moins important pour le son.

2) Les filtres non-récurrents sont stables. Leur réponse est finie.

$$\text{si } |x(n)| < \infty \quad \text{alors } |f * x(n)| < \infty$$

3) Il existe des méthodes de conception de filtre RIF simple à mettre en œuvre.

Inconvénients:

1) Cher en réalisation.

2) Le retard entre l'entrée et le sortie et de taille  $N_f$  échantillons.  
(peut être relativement long). Ce retard s'appelle la phase.

**Filtrage Récurrent**

Les filtres récurrents sont définis par une équation de récurrence. Le résultat à la position "n" dépend du résultat à la position n-1.

Le filtre est spécifié par deux jeux de coefficients  $a(n)$ ,  $1 \leq n < N$  et  $b(n)$ ,  $0 \leq n < N$  :

$$y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} b(n) x(m-n) - \sum_{n=1}^{N-1} a(n) y(m-n)$$

Sauf quelques exceptions, les filtres récurrents ont une Réponse Impulsionnelle Infinie (RII ou "IIR"). Il est possible de réaliser certains filtres RIF par un calcul récurrent, mais ceci est rare et plutôt difficile.

L'intérêt des filtres récurrents est

- 1) leur faible coût en calcul.
- 2) leur faible retard (Très utile pour les communications)

Les inconvénients des filtres récurrents sont

- 1) leur non-linéarité en phase et
- 2) leur instabilité numérique.

Les filtres RII peuvent être conçus par des méthodes semblables à ceux utilisés pour les filtres analogiques. Ceci n'est pas vrai pour les filtres RIF.

**Filtrage par Produit de Transformée de Fourier Discrète.**

Un des intérêt principale de la TFD est qu'il permet de faire les convolutions de deux signaux de taille  $N$  échantillons avec un coût de calcul de l'ordre de  $2N \log(N)$  en lieu de  $N^2$ . Mais le TFD réalise une convolution périodique.

Ceci peut poser un piège.

Soit  $x(n)$  de durée  $n \in [0, N_x-1]$  et  $f(n)$  de durée  $n \in [0, N_f-1]$ .

$$\text{TFD}\{f(n)\} \cdot \text{TFD}\{x(n)\} = \text{TFD}\{f \circ x(n)\}$$

$\circ$  est convolution circulaire

$$y_p(n) = f \circ x(n) = f_p * x_p(n)$$

ou  $f_p(n)$  est un signal périodique :  $f_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n + k N_f)$

et  $x_p(n)$  est un signal périodique :  $x_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n + k N_x)$

et  $y_p(n)$  est un signal périodique :  $y_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(n + k N_y)$

$$y_p(n) = \text{ITFD} \{ \text{TFD}\{f(n)\} \cdot \text{TFD}\{x(n)\} \}$$

Il est possible de calculer une convolution aperiodique,  $f * x(n)$ , par une produit de TFD. Mais pour ce faire, il faut incruster  $f(n)$  et  $x(n)$  dans des séquences périodiques en ajoutant les zéros.

**Convolution par TFD**

Convolution Circulaire par TFD.

$$\text{TFD}\{x_p(n) \circledast y_p(n)\} = \text{TFD}\{x_p(n)\} \cdot \text{TFD}\{y_p(n)\} = X_p(k) \cdot Y_p(k).$$

et par dualité

$$\text{TFD}\{x_p(n) \cdot y_p(n)\} = \text{TFD}\{x_p(n)\} \circledast \text{TFD}\{y_p(n)\} = X_p(k) \circledast Y_p(k)$$

Un des intérêt principale de la TFD est qu'il permet de faire les convolutions de deux signaux de taille  $N$  échantillons avec un coût de calcul de l'ordre de  $2N \log(N)$  in lieu de  $N^2$ . Mais le TFD réalise un convolution périodique.

Ceci peut poser une piège.

Soit  $x(n)$  de durée  $n \in [0, N_x-1]$  et  $y(n)$  de durée  $n \in [0, N_y-1]$ .

Il est possible de calculer un convolution aperiodique,  $x(n) * y(n)$ , par une produit de TFD. Mais pour ce faire, il faut incruster  $x(n)$  et  $y(n)$  dans des séquence périodique  $x_p(n)$  et  $y_p(n)$  de taille  $N = N_x + N_y - 1$ .

Les échantillons de  $x_p(n)$  entre  $N_x-1$  et  $N_x + N_y - 1$  sont zéro.

Les échantillons de  $y_p(n)$  entre  $N_y-1$  et  $N_x + N_y - 1$  sont zéro.

$$\begin{array}{ll} X_p(k) = \text{TFD}\{x_p(n)\} & \text{coût } O(N \ln N) \\ Y_p(k) = \text{TFD}\{y_p(n)\} & \text{coût } O(N \ln N) \\ Z_p(k) = X_p(k) \cdot Y_p(k) & \text{coût } O(N) \\ z_p(n) = \text{TFDI}\{Z_p(k)\} & \text{coût } O(N \ln N) \end{array}$$

Coût total  $3 O(N \ln N) + O(N) = O(N \ln N)$ .

Comparé à  $O(N_x N_y)$  pour  $x(n) * y(n)$

On est gagnant si  $(N_x + N_y) \ln(N_x + N_y) < N_x N_y$

**Caractérisation de Filtres:**

Un filtre est caractérisé par

- 1) sa réponse,  $f(n)$ , à l'impulse numérique  $\delta(n)$ , ou également par
- 2) sa fonction de transfert  $F(\omega)$  ou  $F(z)$  calculé par sa TFTD ou transformée en  $z$ .

Les filtres sont généralement spécifiés dans le domaine Fourier ou dans le domaine  $z$ .

Pour un filtre RIF, la réponse à l'impulse numérique est précisément son jeu de coefficients  $f(n)$ .

$$y(n) = f(n) * x(n)$$

Pour un filtre récursif,  $f(n)$  est de durée infini. Il faut sa fonction de transfert  $F(z)$ . L'intérêt du domaine Fourier (ou  $Z$ ) provient de le fait que convolution en temps est équivalente d'un produit en domaine Fourier.

$$y(t) = x(t) * f(t) \qquad Y(\omega) = X(\omega) F(\omega)$$

et

$$y(t) = x(t) \cdot f(t) \qquad Y(\omega) = X(\omega) * F(\omega)$$

Ceci est valable pour les séquences numériques périodiques.

$$y_p(n) = x(n) * f(n) \qquad Y(\omega) = X(\omega) F(\omega)$$

et

$$y(n) = x(n) \cdot f(n) \qquad Y(\omega) = X(\omega) * F(\omega)$$

Il est plus facile de concevoir et d'analyser les opérations de convolutions en domaine Fourier que domaine  $t$  ou  $n$ .

En conséquence, la description d'un filtre est plus simple en Fourier

**Transformée de Fourier d'un signal numérique**

La Transformée de Fourier de Temps Discrète (TFTD) ou "DTFT" en Anglais. d'un signal numérique est défini par :

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j \omega n}$$

$F(\omega)$  décrit l'effet sur chaque fréquence d'un filtre  $f(n)$ .

**La Fonction de Transfert.**

$$X(\omega) \longrightarrow \boxed{F(\omega)} \longrightarrow Y(\omega) = X(\omega) F(\omega)$$

La fonction de transfert est le ratio de la sortie sur l'entrée d'un système.  $Y/X$ . Pour un système linéaire, ceci est trivial en domaine Fourier.

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{X(\omega) F(\omega)}{X(\omega)} = F(\omega)$$

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{-j \phi(\omega)} = |F(\omega)| \cos(\phi(\omega)) + j |F(\omega)| \sin(\phi(\omega))$$

On peut interpréter ceci comme une expression du fait que le système impose un décalage en temps) et une atténuation en amplitude  $|F(\omega)|$  pour chaque fréquence.

Pour toute fonction linéaire (convolution, corrélation) les fonctions caractéristiques sont les exponentiels complexes:

$$E(\omega) = e^{\pm j \omega t} = \cos(\omega t) \pm j \sin(\omega t)$$

C.-à-d. Une fonction linéaire  $h(n)$  modifiera chaque exponentielle,  $e^{j \omega n}$  par une atténuation (ou amplification), et d'un retard en temps (phase). L'atténuation et le retard sont exprimés par une fonction complexe  $H(\omega)$ .

Ceci est unique et indépendant pour chaque valeur de  $\omega$ .

La fonction de transfert d'un système  $f(t)$  est une fonction complexe  $F(e^{j \omega t})$  qui donne le changement d'amplitude et phase unique à chaque  $e^{j \omega t}$ .



Dérivation de la fonction de transfert.

La convolution par  $f(n)$  avec une exponentielle donne la même exponentielle mais retardée en temps et multipliée en amplitude par  $F(e^{j\omega})$ .

$$F(e^{j\omega}) e^{j\omega n} = f(n) * e^{j\omega n}$$

$$F(e^{j\omega}) e^{j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) e^{j\omega(n-m)}$$

$$F(e^{j\omega}) e^{j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) e^{j\omega n} e^{-j\omega m}$$

$$F(e^{j\omega}) e^{j\omega n} = e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) e^{-j\omega m}$$

$$F(e^{j\omega}) = F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) e^{-j\omega m}$$

et pour tout  $\omega$  :

$$F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) e^{-j\omega m}$$

## Quelques Exemples des Filtres

### Calcul de la dérivée d'un signal numérique.

La dérivée d'une fonction  $s(t)$  est définie par

$$\frac{ds(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{s(t) - s(t - \Delta t)}{\Delta t} \right\}$$

pour un signal numérique,  $s(n)$ , la limite n'existe pas.

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad \frac{ds(n)}{dn} &= \frac{s(n) - s(n-2)}{2} \\ n = 1 : \quad \frac{ds(n)}{dn} &= \frac{s(n) - s(n-1)}{1} \\ n = 0 : \quad \frac{ds(n)}{dn} &= \frac{0}{0} \quad !!! \end{aligned}$$

Conclusion : On ne peut pas calculer une dérivée pour un signal discret.

Mais on peut calculer une première différence :  $\frac{ds(n)}{dn}$  ou bien  $s(n) - s(n-1)$

La différence d'un signal est une convolution avec un filtre !

$$n = 1 : \quad \frac{ds(n)}{dn} = s(n) - s(n-1) = s(n) * [-1 \quad 1]$$

mais aussi

$$n = 2 : \quad \frac{ds(n)}{dn} = \frac{s(n) - s(n-2)}{2} = s(n) * \left[ -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \right]$$

Comment les comparer les deux filtres? Par leur fonction de transferts.

La Transformée de Fourier d'une dérivée a une fonction est

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} = -j \omega \mathcal{F} \{s(t)\}$$

et donc  $\frac{s(t)}{t} = \mathcal{F}^{-1}\{-2j f(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{-2j\} * \mathcal{F}^{-1}\{f(t)\}$

Donc, une dérivée est un FILTRE avec une fonction de transfert  $-2j$

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{t} * s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{-2j\} * s(t)$$

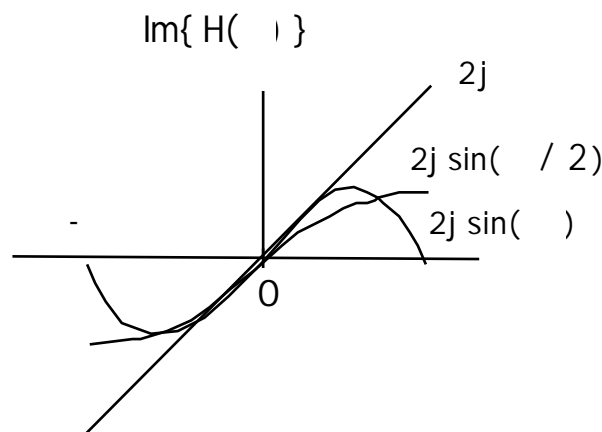
Les filtres linéaires sont associatifs, distributifs et commutative.

$\mathcal{F}^{-1}\{-2j\}$  a une durée infinie. Mais on peut faire une approximation de durée finie par

$$d_1(n) = [-1 \ 1] \text{ ou encore}$$

$$d_2(n) = \frac{1}{2} [-1, 0, 1]$$

Lequel est mieux?



1) Pour  $d_2(n) = [1, 0, -1]$

$$\begin{aligned} D_2(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n) e^{-j\omega n} = d(-1) e^{-j\omega(-1)} + d(1) e^{-j\omega(1)} \\ &= -e^{j\omega} + e^{-j\omega} = -2j \sin(\omega) \end{aligned}$$

2) Pour  $d(n) = [1 \ -1]$

Astuce: pour calculer la fonction de transfert, rendre la fonction symétrique par un retard d'une demi-échantillon  $j = i + 1/2$ .

Donc les coefficients sont localisés à  $-1/2$  et  $1/2$ .

La fonction de transfert est

$$\begin{aligned}
 D_1(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n) e^{-j\omega n} = d(-\frac{1}{2}) e^{-j\omega(-1)} + d(\frac{1}{2}) e^{-j\omega(+1)} \\
 &= -e^{j\omega} + e^{-j\omega} = -2j \sin(\frac{\omega}{2})
 \end{aligned}$$

La dérivée première "amplifie" les hautes fréquences.

Mais le numériseur embrouille les hautes fréquences.

Nota : la transformé de Fourier en Temps Discrète est un suite de Cosinus et j Sinus.

### Intuition : Symétrie et Anti-symétrie

Chaque paire de coefficient Anti-symmetric contribue une  $j\sin(\omega)$

$$1 \ 0 \ -1 \quad 2j \sin(\omega)$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \quad 2j \sin(2\omega)$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \quad 2j \sin(3\omega)$$

...

du même

$$1 \ 0 \ 1 \quad 2 \cos(\omega)$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \quad 2 \cos(2\omega)$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \quad 2j \cos(3\omega)$$

Note :

$$[1 \ 0 \ -1] * [1 \ 0 \ -1] = 2j \sin(\omega) \cdot 2j \sin(\omega)$$

$$[1 \ 0 \ -2 \ 0 \ 1] = -4 \sin(\omega)^2$$

$$\text{mais } \mathcal{F}\{[1 \ 0 \ -2 \ 0 \ 1]\} = -2 + 2\cos(2\omega)$$

$$\text{donc } 4 \sin(\omega)^2 = 2 - 2 \cos(2\omega)$$

**Une pense Bête pour les relations trigonométriques**

On peut utiliser les petits filtres comme rappellent des relations trigonometrique. !!

exemples :

a)  $4 \cos(\theta)^2 = 2 + 2\cos(2\theta)$

$$\mathcal{F} \{ [1 \ 0 \ 1] * [1 \ 0 \ 1] \} = \mathcal{F} \{ [1 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1] \}$$

b)  $4j \cos(\theta) \sin(\theta) = 2j \sin(2\theta)$

$$\mathcal{F} \{ [1 \ 0 \ 1] * [1 \ 0 \ -1] \} = \mathcal{F} \{ [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] \}$$

**Lissage d'un signal numérique : Les Filtres Binomiaux**

(coefficients binomiaux) sont les coefficients dupolynôme :

$$(x + y)^n = \sum_{m=-n/2}^{n/2} b_{m,n} x^{n-m} y^m$$

$$b_{m,n} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! m!} = b_n(m)$$

Les coefficients du séries binomiaux sont générés par le triangle de Pascal :

	Level (n)	Sum	Variance ( $\frac{2}{n}$ )	Std.
1	0	1	0	0
1 1	1	2	1 / 4	1/2
1 2 1	2	4	1 / 2	2/2
1 3 3 1	3	8	3/4	3/2
1 4 6 4 1	4	16	1	1
1 5 10 10 5 1	5	32	5/4	5/2
1 6 15 20 15 6 1	6	64	6/4	6/2
1 7 21 35 35 21 7 1	7	128	7/4	7/2
1 8 29 56 70 56 29 8	8	256	2	2

Ses coefficients forme des filtres avec des propriétés remarquables. Ils sont les coefficients de la meilleure approximation du filtre Gaussien sujet aux contraintes d’être discret et fini.

Filtres Binomiaux :  $b_n(m) = b_0(m)^{*n} = [1, 1]^{*n} = n$  convolution de  $[1, 1]$

Gain :  $b_n = 2^n$

Variance :  $\text{Var}\{b_n\} = n * \text{Var}\{b_0\} = \frac{n}{4}$

Fonction de Transfert :  $B_n(\omega) = [2 \cos(\frac{\omega}{2})]^n$

Pour  $n$  paire :  $B_n(\omega) = [2 + 2 \cos(\omega)]^{n/2}$

$$\text{Var}\{b_n(m)\} = \frac{1}{2^n} \sum_{m=-n/2}^{n/2} b_n(m) m^2$$

exemple:

$$\begin{aligned} \text{Var}[1, 4, 6, 4, 1] &= \frac{1}{16} \{ 1(2)^2 + 4(1)^2 + 6(0)^2 + 4(1)^2 + 1(2)^2 \} \\ &= \frac{1}{16} \{ 4 + 4 + 4 + 4 \} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Var}[1, 1] = \frac{1}{2} \{ (1(\frac{-1}{2}))^2 + 1(\frac{1}{2})^2 \} = \frac{1}{2} (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$$

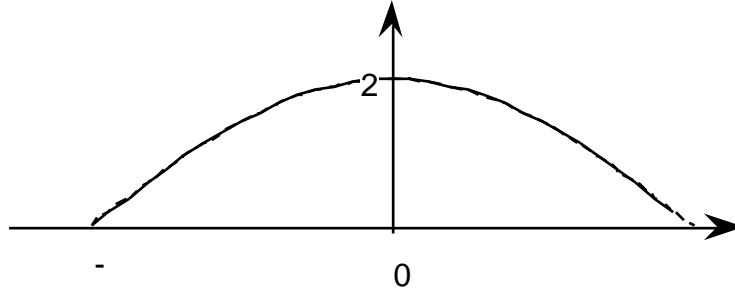
Les Filtres Binomiaux donnent des filtres Gaussiens "finis et discrets"

La fonction de transfert des binomiaux peut être calculé facilement à la main :

Exemples

$$b_1(m) = [1 \ 1]$$

$$B_1(\omega) = 1 e^{j(-1/2)} + 1 e^{j(1/2)} = 2 \cos(\omega/2)$$

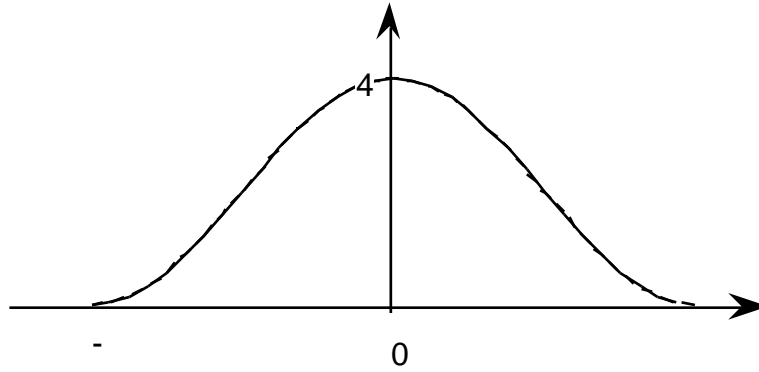


$$b_2(m) = [1 \ 2 \ 1] \quad (\text{Deuxième filtre Binomial})$$

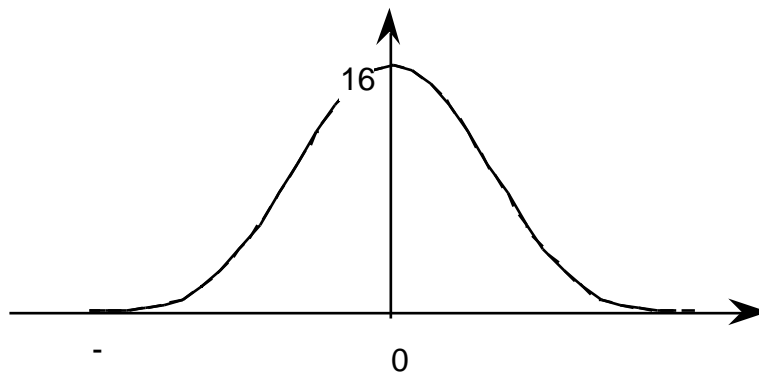
$$B_2(\omega) = 1 e^{j(-1)} + 2 e^{j(0)} + 1 e^{j(1)}$$

$$= 2 + e^j + e^{-j}$$

$$B_2(\omega) = 2 + 2 \cos(\omega) = [2 \cos(\omega/2)]^2$$



$$b_4(m) = [1 \ 1]^{*4} = [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1] \quad B_4(\omega) = 6 + 8 \cos(\omega) + 2 \cos(2\omega) = [2 \cos(\omega/2)]^4$$



## Méthode de synthèse de la série de Fourier

La méthode décrite ci-après est dite “méthode de la fenêtre” ou “méthode de la série de Fourier”.

1) On spécifie les caractéristiques souhaité en fréquence  $H_s(\omega)$  pour l'intervalle

$$-\omega_c < \omega < \omega_c.$$

( $H_s(\omega)$  est périodique avec période  $2\pi$  pour  $h_s(n)$  échantillonné.)

2) Les coefficients du filtre idéal sont donnée par la transformée de Fourier inverse

$$h_s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_s(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

3) On determine la durée du filtre,  $N$ .

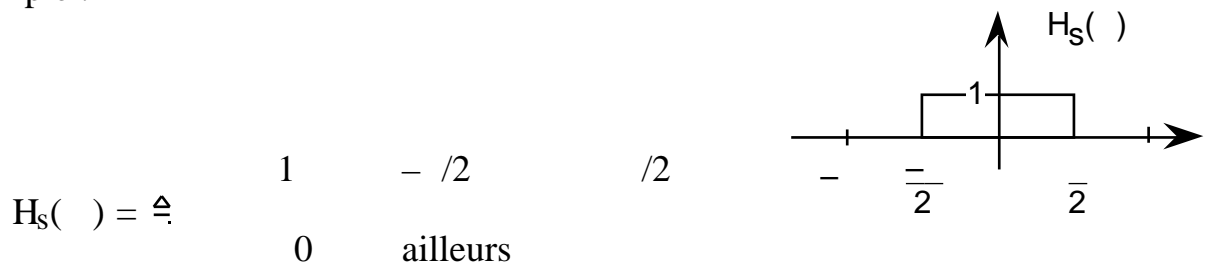
$$h(n) = h_s(n) \cdot w_N(n)$$

4) On vérifie que  $H(\omega) - H_s(\omega)$  est acceptable.

$$H(\omega) = H_s(\omega) * W_N(\omega)$$



Exemple :



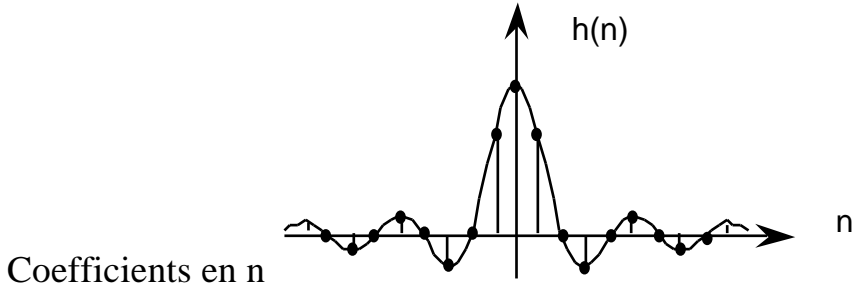
$$h_s(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H_s(\omega) e^{j\omega \cdot 0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \omega \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{1}{2}$$

$$h_s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H_s(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j\omega n} d\omega$$

$$h_s(n) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} \left[ e^{jn/2} - e^{-jn/2} \right] = \frac{\sin(n/2)}{n}$$

Filtre passe-bas idéal avec fréquence limite  $\omega_c$ :  $h_s(n) = \frac{\sin(n \omega_c)}{n}$



On ne peut garder qu'un nombre N (fini) de coefficients h(n).

$$h(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin(n/2)}{n/2} \cdot w_N(n)$$

**Effets de la limitation de la durée de  $h_s(n)$ :**

Ne garder que N coefficients est équivalent à multiplier la suite infinie des  $h(n)$  par un fonction porte  $w(n)$ .

$$w(n) \triangleq \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La réponse impulsionnelle est :

$$h(n) = h_s(n) \cdot w(n) \quad \text{pour } 0 \leq n < N$$

Sa fonction de transfert est :

$$H(\omega) = H_s(\omega) * W(\omega) = \text{rect}(\omega / \omega_c) * \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \cdot e^{-j(N-1)\omega/2}$$

Cette fonction de porte est la fenêtre rectangulaire .

Elle caractérise une troncature temporelle qui introduit des ondulations sur la réponse en fréquence du filtre.

**La Sinus Cardinale pour une fonction discrète**

$w_N(n)$  est une fenêtre rectangulaire ou fonction de porte (parfois appelé  $rect_N(n)$ )

$$w_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & n < 0 \text{ et } n \geq N \end{cases}$$

$$W_N(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} w_N(n) e^{-j \omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j \omega})^n$$

afin de simplifier l'algebre, on substitue :  $z = e^{-j \omega}$

il nous faut identité :  $\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{z^N - 1}{z - 1}$

donc pour  $z = e^{-j \omega} = e^{-j 2 \pi f}$

$$W_N(f) = e^{-j \pi f(N-1)} \frac{(e^{-j 2 \pi f N/2} - e^{j 2 \pi f N/2})}{(e^{-j 2 \pi f/2} - e^{j 2 \pi f/2})} = e^{-j \pi f(N-1)} \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}$$

ou bien  $\omega = 2 \pi f \Rightarrow f = \omega / 2 \pi$

$$W_N(\omega) = e^{-j \omega (N-1)/4} \frac{\sin(N \omega / 4)}{\sin(\omega / 4)}$$

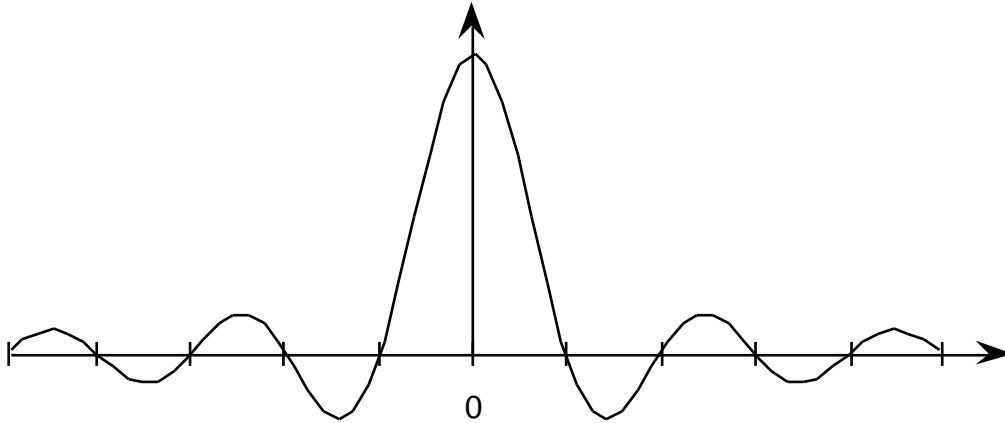
Il s'agit de l'équivalent discrète à  $\text{sinc}(\omega)$  avec un retard de  $\frac{(N-1)\omega}{4}$

Si on a défini  $w(n)$  avec un nombre impair de coefficients, centré sur zéro :

$$w_N(n) \hat{=} \begin{cases} 1 & -N/2 \leq n < N/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

puis :

$$W_N(f) = \frac{(e^{-j2\pi fN/2} - e^{j2\pi fN/2})}{(e^{-j2\pi f/2} - e^{j2\pi f/2})} = \frac{\sin(\pi fN)}{\sin(\pi f)}$$



### Utilité :

Pour tout filtre de durée  $N$  ( $N$  fini) (donc, pour toutes les filtres RIF)

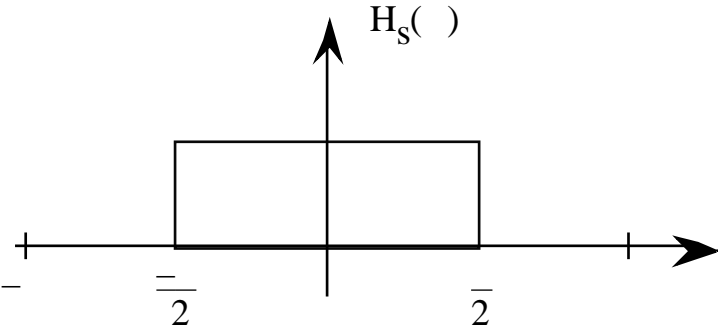
$$x(n) = x(n) \cdot w_N(n)$$

et en domaine Fourier :

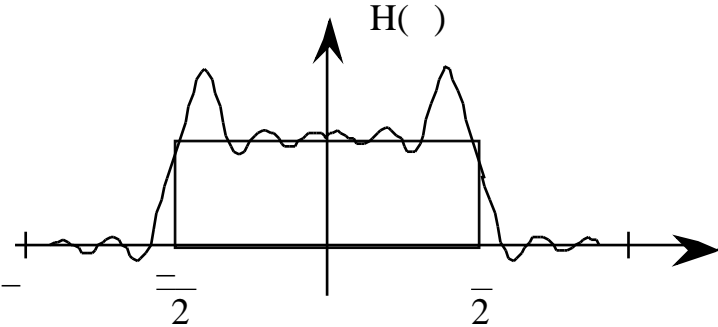
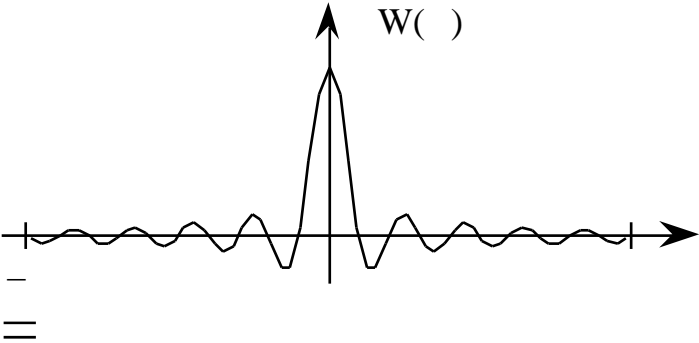
$$\mathcal{F}\{x(n) \cdot w_N(n)\} = X(\omega) * W_N(\omega).$$

La spectre  $X(\omega)$  de tout filtre de durée fini,  $x(n)$ , est convoluée par  $W_N(\omega)$ .

**Filtre passe bas**

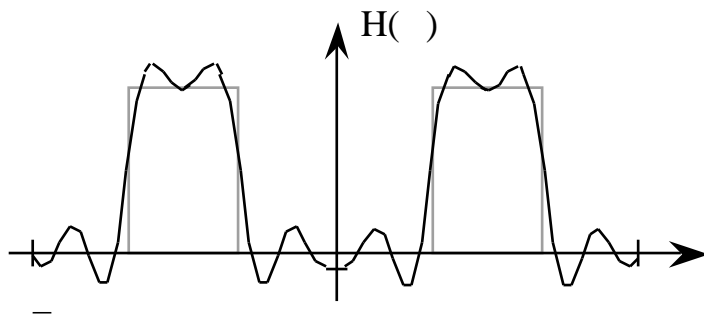
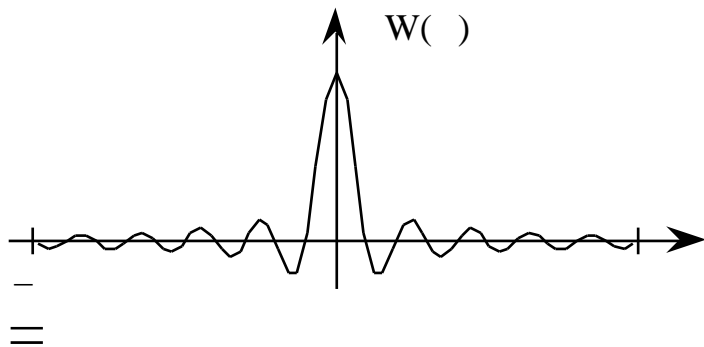
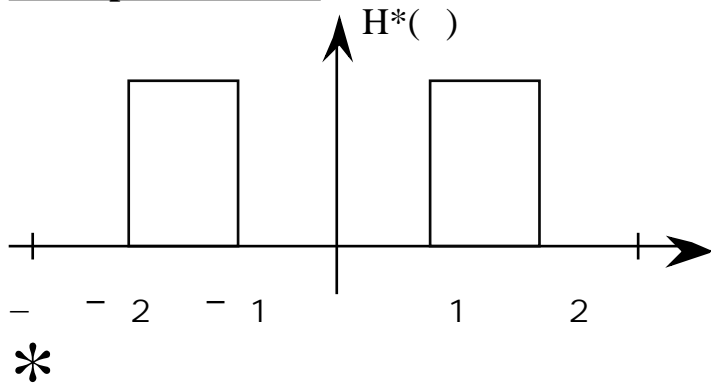


\*



$$H(\omega) = H_s(\omega) * W(\omega) = \text{rect}(\omega / \pi) * \frac{\sin(N\omega / 2)}{\sin(\omega / 2)} \cdot e^{-j(N-1)\omega / 4}$$

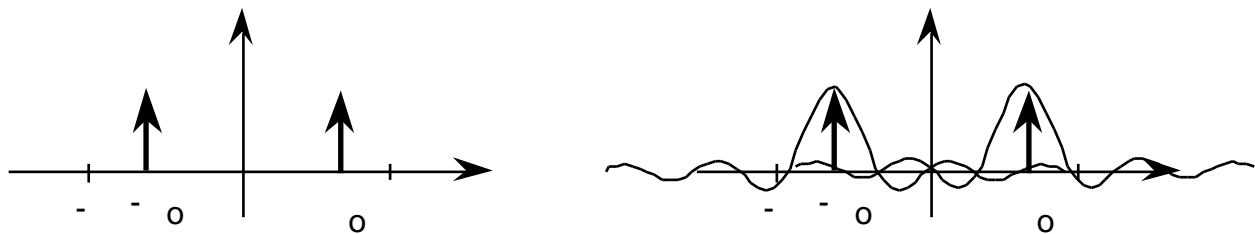
**filtre passe bande**



$$H(\omega) = H_s(\omega) * W(\omega) = [\text{rect}(\omega - 1) - \text{rect}(\omega + 1)] * \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \cdot e^{-j(N-1)\omega/4}$$

Filtre pass bande par modulation

Un autre approche de la conception d'un filtre passe bande :



$$H_s(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)$$

Pour taille N :  $h(n) = \cos(\omega_0 n) \cdot w_N(n)$  donc  $H(\omega) = \frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) * \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$

## Gabarit d'un Filtre

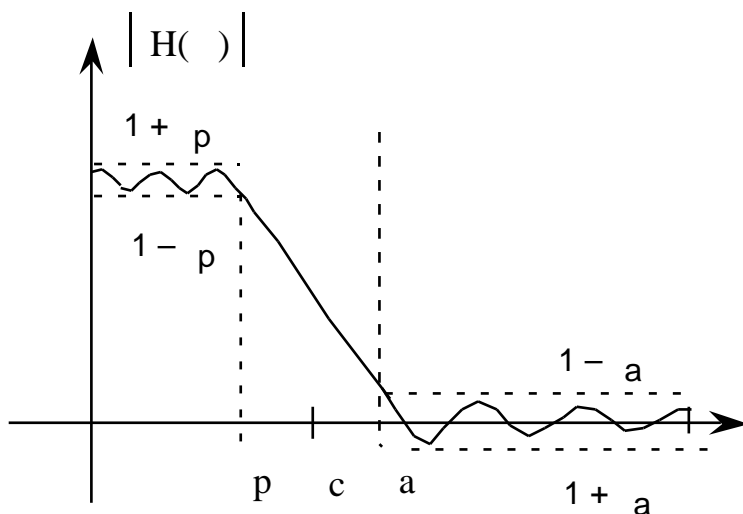
Le gabarit d'un filtre numérique peut être caractérisé par :

Les fréquences caractéristiques définies par rapport aux bandes passants et atténuées: par exemple : dernière fréquence passante et première fréquence atténuée pour un filtre passe bas.

Les erreurs tolérées par rapport à la réponse en amplitude idéale. Elles sont désignées par ondulations et définies pour chacune des bandes de fréquences.

On spécifie les caractéristique d'un filtre avec un gabarit en donnant des paramètres:

- $p$  : L'ondulation en bande passant
- $p$  Dernière fréquence passante
- $a$  : première fréquence atténuée
- $a$  : L'ondulation en bande atténuée.



Ici  $|H(\omega)|$  est montré en amplitude, mais il est généralement exprimée en dB.

La différence  $a - p$  s'appelle bande de transition, et le rapport  $\frac{a + p}{a - p}$  représente la raideur du filtre.